

GEOMETRIA

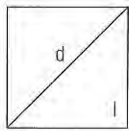
A= Area

2p= Perimetro

d= Diagonale

h= Altezza

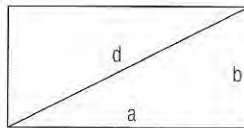
l=Lato



Quadrato

$$A = l^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$2p = 4l$$

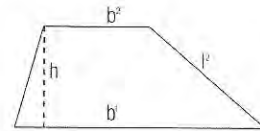


Rettangolo

$$A = a \cdot b$$

$$2p = 2(a + b)$$

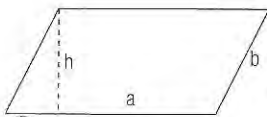
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Trapezio qualsiasi

$$A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$$

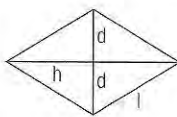
$$2p = b_1 + b_2 + l_1 + l_2$$



Parallelogrammo

$$A = a \cdot h$$

$$2p = 2(a + b)$$



Rombo

$$A = l \cdot h = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

$$2p = 4l$$

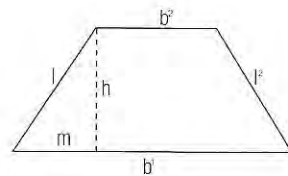
$$d_1^2 + d_2^2 = 4l^2$$



SFERA

$$A = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



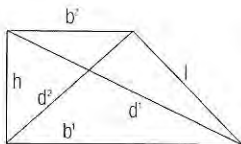
Trapezio isoscele

$$A = \frac{1}{2} (b_1 + b_2) h$$

$$2p = b_1 + b_2 + 2l$$

$$l^2 = h^2 + m^2$$

$$b_1 = b_2 + 2m$$

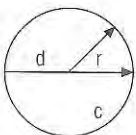


Trapezio rettangolo

$$A = \frac{1}{2} h (b_1 + b_2)$$

$$2p = b_1 + b_2 + l + h$$

$$d_2^2 = h^2 + b_2^2 \quad d_1^2 = h^2 + b_1^2$$

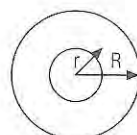


Circonferenza e cerchio

$$C = 2\pi \cdot r = d \cdot \pi$$

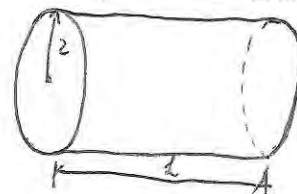
$$\pi = 3,1415927$$

$$A = r^2 \cdot \pi$$



Corona circolare

$$A = (R^2 - r^2) \pi$$



CILINDRO CIRCOLARE RETTO

$$A_{\text{lat}} = 2\pi r h$$

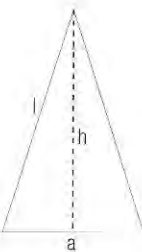
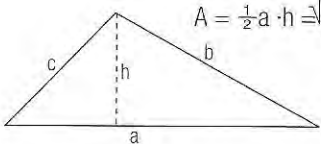
$$V = \pi r^2 h$$

$$A_{\text{tot}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Triangolo qualsiasi

$$2p = a + b + c$$

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h \Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c)$$

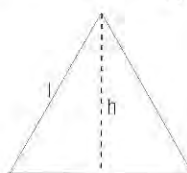


Triangolo isoscele

$$A = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$2p = a + 2l$$

$$l = \frac{(a)^2 + h^2}{2}$$



Triangolo equilatero

$$A = \frac{1}{2} l \cdot h$$

$$h = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

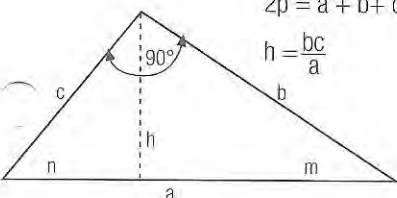
$$2p = 3l$$

Triangolo rettangolo

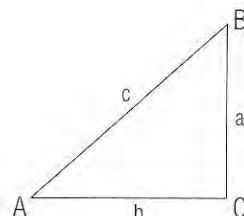
$$A = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot c$$

$$2p = a + b + c$$

$$h = \frac{bc}{a}$$



Teorema di Pitagora

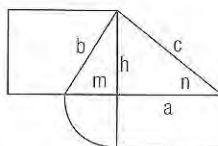


$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c$$

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a$$

$$\sqrt{c^2 - a^2} = b$$



Teorema di Euclide

$$h = \sqrt{m \cdot n}$$

$$b = \sqrt{a \cdot m}$$

$$c = \sqrt{a \cdot n}$$

$$a = \sqrt{m + n}$$

DIVERGENZA

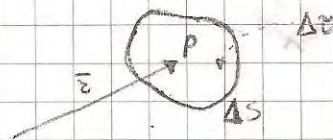
FORMA ASSOLUTA (NON RICHIEDE L'ADOZIONE DI UN SISTEMA DI COORDINATE)

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} definito in un dominio X dello spazio aperto e semplicemente connesso. Sia P un punto del dominio X individuato dal vettore posizione \vec{r} .

Sia inoltre ΔS una superficie chiusa orientata verso l'esterno, che comprende nel suo interno il punto P . Denotiamo con $\Delta \tau$ il volume delimitato da ΔS .

Si definisce divergenza del campo vettoriale \vec{A} nel punto P il limite per $\Delta \tau$ che tende a zero del rapporto tra il flusso del campo vettoriale \vec{A} attraverso ΔS e il volume $\Delta \tau$.

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta \tau}$$



La divergenza è una grandezza scalare che indica la capacità del punto P di comportarsi come sorgente, elemento neutro, pozzo del campo vettoriale \vec{A} e ricorda che il flusso su una unità di volume può essere totale positivo, nullo o negativo. In definitiva la divergenza è un'operatore che misura la tendenza di un campo vettoriale a convergere o divergere verso un punto del campo.

FORMA CARTESIANA

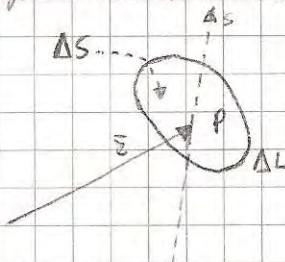
$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

ROTORE

FORMA ASSOLUTA

Consideriamo un campo vettoriale \vec{A} definito in un dominio X dello spazio aperto e semplicemente connesso. Sia P un punto del dominio X individuato dal vettore posizione \vec{r} ed α una retta orientata finché, penetrando per P . Sia ΔS una superficie piana, perpendicolare alla retta α , in modo che comprenda il punto P . Denotiamo con ΔL la linea chiusa che delimita ΔS . Si definisce rotore del campo vettoriale \vec{A} nel punto P , secondo la retta orientata α , il limite per ΔS che tende a zero del rapporto tra la circolazione del campo vettoriale \vec{A} lungo la linea chiusa ΔL e la superficie ΔS :

$$\text{rot } \vec{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \vec{A} \cdot d\vec{L}}{\Delta S}$$



Nel prendere il limite suddetto, il punto P deve sempre rimanere interno alla superficie ΔS e la superficie stessa deve sempre mantenersi piana e sempre perpendicolare alla retta α . Inoltre, la circolazione va effettuata secondo il verso indicato dall'orientamento della linea chiusa.

In definitiva il rotore indica la tendenza del campo vettoriale \vec{A} a girare lungo una linea ΔL e nella direzione della retta α . Il rotore è una grandezza vettoriale.

FORMA CARTESIANA

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Sia A un campo vettoriale di classe C^1 in un dominio aperto X .

Il flusso di un campo vettoriale A attraverso la superficie chiusa S è pari all'integrale della divergenza moltiplicata nel volume τ delimitato da S .

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE (O DI STOKES)

Il flusso del rotore di \vec{A} ottenuto una piccola superficie reale S che abbia L come frontiera è uguale alla circolazione di \vec{A} lungo L

$$\int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

FLUSSO

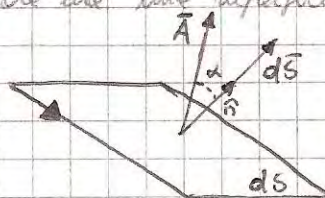
MATEMATICAMENTE: il flusso di un campo vettoriale \vec{A} ottenuto una superficie orientata S è definito come l'integrale del prodotto reale del campo con il vettore normale alla superficie, esteso su tutta la superficie stessa.

$$\Phi(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \text{dove } d\vec{S} = dS \hat{n} \quad \text{cioè } d\vec{S} \text{ è il vettore di modulo } dS, \text{ con direzione e verso del vettore } \hat{n}. d\vec{S} \text{ rappresenta le superfici infinitesime orientate. (*)}$$

FISICAMENTE: si tratta di una grandezza fisica usata in fisica per fenomeni di trasporto e rappresenta la quantità delle grandezze che attraversano una data superficie. Se tali grandezze è esprimibile in funzione di un campo vettoriale, allora il flusso è la quantità del campo intercettata da una superficie.

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{S} = A dS \cos \alpha$$

FLUSSO INFINITESIMO



(*) L'orientamento della superficie dS può essere correlato al verso di percorrenza del bordo della superficie stessa, il quale a suo volta è individuato tramite le regole della mano destra applicate al vettore \hat{n} .

CIRCUITAZIONE

Per calcolare in termini l'integrale curvilineo di una forma differenziale estesa ad una curva chiusa. Poiché le componenti di una forma differenziale possono essere le componenti di un dato campo \vec{A} associato alle forme, la circolazione può essere scritta come:

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

dove \vec{A} = campo vettoriale
 $d\vec{r}$ = vettore tangente alle curve Γ
 Γ = curve
 dr = elemento curvilineo sotto forma differenziale.

(**) Per integrali curvilinei in termini un integrale in cui le funzione da integrare è valutata lungo una curva, in altre parole l'integrale curvilineo di descrivere l'effetto dei vettori di un dato campo vettoriale su ogni punto di una data curva.

ESEMPIO:

Un esempio di integrale curvilineo è il lavoro compiuto dalle forze del campo, ma un oggetto spostato attraverso un campo lungo una data traiettoria, cioè:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

ALTRI OPERATORI DIFFERENZIALI

GRADIENTE: Sia A un campo scalare. Dico gradiente scalare A , il campo vettoriale le cui componenti sono le derivate parziali di A rispetto a x, y, z cioè:

$$\text{grad} A = \vec{\nabla} A \rightarrow \text{FORMA ASSOLUTA} \quad \text{grad} A = \left(\frac{\partial A}{\partial x} \hat{i}, \frac{\partial A}{\partial y} \hat{j}, \frac{\partial A}{\partial z} \hat{k} \right) \rightarrow \text{FORMA CARTESIANA}$$

LAPLACIANO: Sia A un campo scalare o vettoriale. Dico laplaciano di A le divergenze del gradiente di A

$$\text{div}(\text{grad} A) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} A) = \nabla^2 A \rightarrow \text{FORMA ASSOLUTA}$$

$$\text{div}(\text{grad} A) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \rightarrow \text{FORMA CARTESIANA}$$

CAMPO CONSERVATIVO: POTENZIALE SCALARE

Sia \vec{A} un campo vettoriale irrotazionale in un certo dominio, tale cioè che in ogni punto di quel dominio il rotore è nullo: $\text{rot } \vec{A} = 0$ (in tal caso il campo \vec{A} si dice conservativo).

Allora possiamo scrivere che il campo \vec{A} è pari al gradiente di un campo V scalare detto potenziale scalare.

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = \vec{\nabla} V$$

DIMOSTRAZIONE (FORMA CARTESIANA)

Bisogna dimostrare che il rotore del gradiente di V è nullo, cioè:

$$\text{rot}(\text{grad } V) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) \hat{k}$$

per il th. di Schwarz le derivate seconde sono uguali quindi:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \text{rot}(\text{grad } V) = 0$$

CAMPO SOLENOIDALE: POTENZIALE VETTORE

Se \vec{A} è un campo vettoriale solenoideale, tale cioè che in ogni punto (di un certo dominio) la divergenza è nulla: $\text{div } \vec{A} = 0$, esso può esprimersi come il rotore di un campo vettoriale \vec{Z} (il suo potenziale vettore):

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A} = \text{rot } \vec{Z}$$

DIMOSTRAZIONE

Bisogna dimostrare che $\text{div}(\text{rot } \vec{Z}) = 0$ infatti:

$$\text{rot } \vec{Z} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Z_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial Z_y}{\partial x} - \frac{\partial Z_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Potendo:

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot } \vec{Z}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Z_z}{\partial y} - \frac{\partial Z_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial Z_x}{\partial z} - \frac{\partial Z_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Z_y}{\partial x} - \frac{\partial Z_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 Z_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Z_x}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 Z_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 Z_y}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned}$$

Le quantità all'interno delle parentesi nell'ultimo passaggio sono uguali per il th. di Schwarz, dunque risulta che $\text{div}(\text{rot } \vec{Z}) = 0$

RELAZIONI DI 2° ORDINE DEL NABLA

	grad	div	rot
grad	temore	grad div	temore
div	leplevemo	impossibile	zero
rot	zero	impossibile	grad div - leplevemo

FORZA DI COULOMB

È fatto supponendo che date due particelle o cerchi puntiformi con cariche di modulo q_1 e q_2 e separate da una distanza r , le forze elettrostatiche di attrazione o repulsione recambiate tra di esse sono direttamente:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow \text{FOUR SCALARS}$$

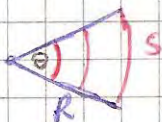
$$\vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{z_{12}^2} \hat{z}_{12} \rightarrow \text{FOUR VECTORS!}$$

OSSERVAZIONI:

1. Le forze di Coulomb \vec{F} dirette sempre lungo la direzione congiungente le due cariche e tale direzione \hat{r} data dal vettore \hat{r} .
2. Il verso delle forze di Coulomb dipende dal tipo di carica:
 - cariche dello stesso segno si respingono \rightarrow forze repulsive dirette verso l'esterno
 - cariche di segno opposto si attraggono \rightarrow forze attrattive dirette verso l'interno
3. L'intensità delle forze di Coulomb dipende dal tipo di materiale in cui esse si presenta. Le costanti ϵ_0 e ϵ dette costanti dielettriche nel vuoto, ma tale costante viene al variare delle proprietà del materiale dielettrico considerato.
4. Il 4π che compare nelle formule delle forze di Coulomb include l'angolo pieno spaziale. Per capire tale concetto introduciamo l'angolo solido.

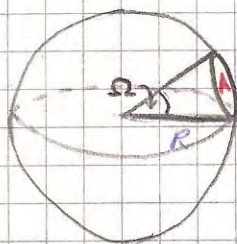
ÂNGULO SÓLIDO

Nel pieno un empolo è come una murea dell' spessore di due umicelli
eventi lo stesso oppure



$$\theta = \frac{S}{R} = \left[\frac{\text{arco di circonferenza}}{\text{raggio}} \right] \rightarrow \text{def. radiente}$$

Nello spazio tridimensionale il concetto di angolo si induce dall'apertura di un cono la cui base è la circonferenza sottesa ad una porzione di sfera.



$$A = \Omega R^2$$

dove $A =$ area della circonferenza sottesa
ed una porzione di sfera

Ω = emfale solido

$$\Omega = \frac{A}{R^2} = \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}^2} \right] \rightarrow \text{def. adimensionale}$$

5. GP π nelle formule di Coulomb a ricordo che le cariche hanno superficie sferica e rappresentato che l'espressione delle forze le ummettate sferice, il che significa che le forze di Coulomb dipende del raggio di interazione fra due cariche.

ELETTROSTATICA

Studio delle interazioni tra campi elettrici non dipendenti del tempo.

CANPO ELETTROSTATICO

Si definisce campo elettrostatico generato da una carica puntiforme, il rapporto

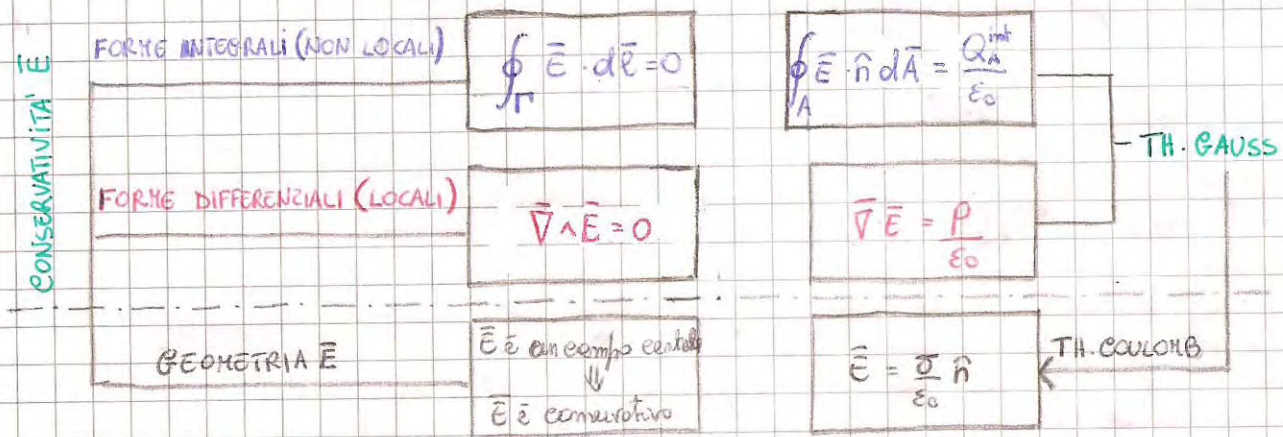
$E = \frac{F}{q}$ dove $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{z^2}$ è la forza una carica Q esercita su una carica q posta in un punto dello spazio P a distanza z da Q

OSSERVAZIONI:

1. Il campo \vec{E} è un campo vettoriale e ogni vettore è diretto ad R e lo stesso verso del vettore \vec{F} .
2. Il campo \vec{E} è un campo scalare. Questo è vero considerando il fatto che l'espressione delle forze \vec{F} le sommative fornisce il che significa che tutte le forze agiscono perpendicolarmente alle tangenti delle curve che compongono la curva.
3. Il campo \vec{E} è conservativo.

SCHEMA SEMPLIFICATIVO

4 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROSTATICA



TEOREMA DI GAUSS (FORMA INTEGRALE)

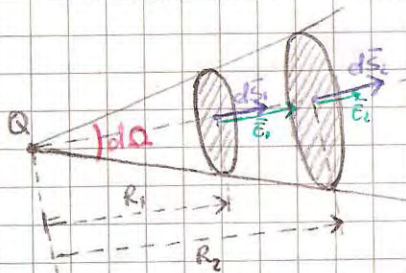
ENUNCIATO: Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa, orientata verso l'esterno, è uguale alla somma algebrica delle cariche interne alla superficie, diviso la costante dielettrica del vuoto

$$\Phi_E(S) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

PREMESSA

Prima di procedere con la dimostrazione è utile studiare come si comporta il flusso del campo elettrostatico generato da una carica puntiforme Q attraverso due superfici che racchiudono un angolo solido.

I° CASO: Due superfici elementari dS_1 e dS_2 perpendicolari alla normale \hat{e} e aventi lunghezze R_1 e R_2 dalla carica Q .



Poiché le superfici sono orientate lungo \hat{e} si ha:

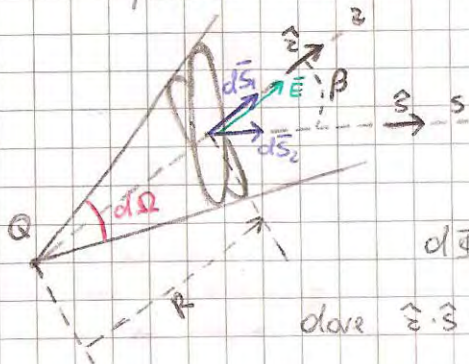
$$d\vec{S}_1 = dS_1 \hat{e} \quad \text{e} \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \hat{e}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1^2} \hat{e} \Rightarrow d\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1^2} dS_1$$

ricordando che $dS_1 = d\Omega R_1^2$ (def. steradiano) si ha
 poiché non vi è più dipendenza dalle distanze si evince: $d\Phi_1 = d\Phi_2$

$$d\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_1^2} d\Omega R_1^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q d\Omega$$

II° CASO: Due superfici elementari dS_1 e dS_2 distanti R dalla carica Q e orientate rispettivamente con i versori \hat{e} ed \hat{s} .



$$d\vec{S}_1 = dS_1 \hat{e}, \quad d\vec{S}_2 = dS_2 \hat{s}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{e} \quad d\Phi_1 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_1$$

$$d\Phi_2 = \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_2 (\hat{e} \cdot \hat{s}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_2 \cos\beta$$

dove $\hat{e} \cdot \hat{s} = |\hat{e}| \cdot |\hat{s}| \cos\beta = \cos\beta$

ricordando che $dS_1 = dS_2 \cos\beta$, si evince: $d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} dS_1 = d\Phi_1$

OSSERVAZIONI

Si noti che il flusso, finito l'angolo solido $d\Omega$, non dipende né dalle distanze né dall'orientamento delle superfici elementari, sono conseguenze dei due teoremi, l'uno di natura fisica, l'altro matematico:

1) Il campo di Coulomb va come $1/r^2$ e le superfici sferiche come r^2 . Il flusso è puramente il prodotto

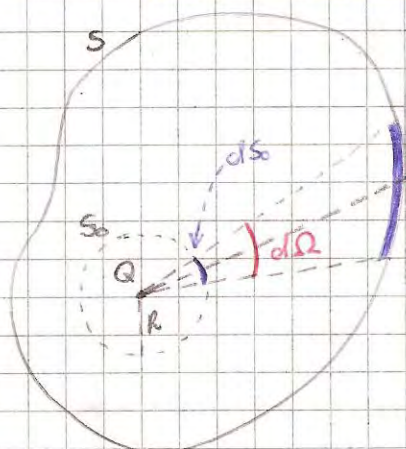
del campo per le superficie risulta indipendente da z .

2) Nella definizione di flusso vi è un prodotto scalare, cioè una proiezione. Questo fa sì che quando la superficie si inclina, aumenta sì l'angolo, ma la sua proiezione è sempre la stessa.

Con queste premesse possiamo ora affrontare il problema fondamentale del calcolo del flusso del campo elettrostatico, generato da una carica puntiforme Q , attraverso una qualunque superficie chiusa S , orientata verso l'esterno.

Dimostrazione

Caso I. CARICA INTERNA ALLA SUPERFICIE S

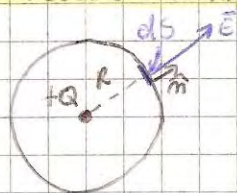


Sia Q una carica puntiforme interna ad una superficie S chiusa e orientata verso l'esterno. Sia, inoltre, S_0 una superficie sferica di raggio R , centrata sulla carica e contenuta in S . Consideriamo l'angolo solido elementare $d\Omega$ uscente dalla carica Q .

Per quanto detto precedentemente, il flusso del campo elettrostatico attraverso la superficie elementare dS è uguale a quello attraverso la superficie elementare dS_0 individuata dall'angolo solido $d\Omega$ in S_0 .

Inoltre, poiché la regione interna alla superficie S può essere vista come una "pentazione" costituita da infiniti angoli solidi uscenti da Q , il flusso del campo elettrostatico generato dalla carica Q attraverso la superficie S è uguale a quello attraverso la superficie sferica S_0 .

Nota: FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R



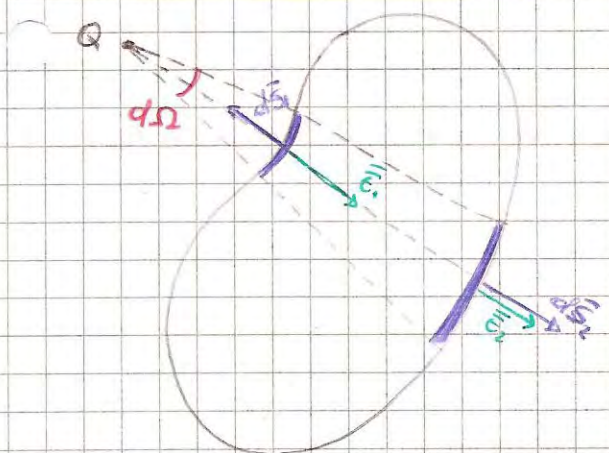
La superficie sferica è orientata verso l'esterno, nel verso di \hat{n} .

$$\Phi_E(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \cdot dS$$

$$\Phi_E(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{poiché } \begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{n} \\ \oint_S dS = 4\pi R^2 \text{ (area sfera)} \end{cases}$$

Caso II. CARICA ESTERNA ALLA SUPERFICIE S



Consideriamo un angolo solido elementare $d\Omega$ uscente dalla carica Q . Si vede subito che i flussi attraverso le superfici elementari dS_1 e dS_2 (orientate verso l'esterno) sono uguali ed opposti, quindi la loro somma è zero. Perciò

$$\Phi_E(S) = 0$$

TEOREMA DI GAUSS (FORMA DIFFERENZIALE)

Consideriamo una distribuzione volumica di carica descritta dallo densità $\rho = \frac{Q}{V}$.

Fissata una qualunque superficie chiusa S , orientata verso l'esterno, che delimita un certo volume τ , il teorema di Gauss si scrive:

$$\boxed{\Phi_E(S) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}} \begin{cases} \longrightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho dV & \text{integrale di volume sulla} \\ \longrightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} & \text{definizione di flusso} \end{cases}$$

Si le quindi:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

applicheremo al 1° membro il th. della divergenza
per il teorema:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad \text{da cui, sostituendo risulta:}$$

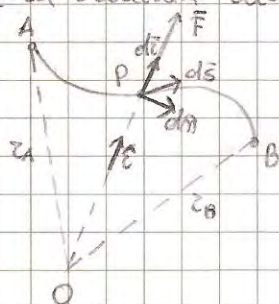
$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

dato l'arbitrarietà della superficie S , questo teorema
implica che per integrali sono uguali, quindi:

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO \vec{E} (GEOMETRIA)

Un campo di forze \vec{F} è detto centrale, di centro O , se in ogni punto P della regione
le direzioni delle vett. \vec{OP} e modulo dipendente solo delle distanze r di P da O



$$\vec{F} = m \Phi(r) \hat{r}$$

$$\vec{\Phi} = \Phi(r) \hat{r}$$

$$d\vec{r} \perp d\vec{n}$$

$$dL_{AB} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \Phi(r) \hat{r} \cdot d\vec{s} \quad d\vec{s} = d\vec{r} + d\vec{n}$$

$$dL_{AB} = m \Phi(r) \hat{r} \cdot (d\vec{r} + d\vec{n}) = m \Phi(r) \hat{r} \cdot d\vec{r} = m \Phi(r) dr$$

$$L_{AB} = m \int_{r_A}^{r_B} \Phi(r) dr$$

Quindi il lavoro compiuto dal campo \vec{F} su m non dipende dal percorso ma
dei moduli delle distanze r_A e r_B . Questo per definizione significa che il campo
 \vec{F} è conservativo, ma poiché le distanze r_A e r_B sono distanze calcolate rispetto
ad uno stesso origine O' allora tali distanze si dicono radiali e
infatti \vec{F} è stato appunto detto un campo centrale (o radiale) pertanto:
ogni campo centrale è conservativo

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO \vec{E} (FORMA INTEGRALE)

Poiché il campo \vec{E} è un campo centrale, allora sappiamo che \vec{E} è conservativo.

Pertanto, una qualunque distribuzione di cariche, può essere vista come l'insieme
(finito o infinito) di cariche. il cui campo prodotto da ognuna è conservativo.

Quindi, in virtù delle sovrapposizione degli effetti, il campo prodotto dalle
interne distribuzioni di cariche è anch'esse conservativo.

Perciò, indicata con L una qualunque linea chiusa, la "circolazione" del campo
lungo di esse risulta essere nulla

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Questo significa che il lavoro compiuto dal campo \vec{E} su una carica q lungo
una linea chiusa è nullo.

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO \vec{E} (FORMA DIFFERENZIALE)

Per la conservatività del campo \vec{E} in forme integrali sappiamo che: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.

Applicando al primo membro il teorema della circolazione si avrà che:

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

dove S è una qualunque superficie che si appoggia alle linee L . Poiché S è
arbitraria si avrà che in ogni punto

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = 0}$$

TEOREMA DI COULOMB

ENUNCIATO: Il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto P di una superficie di un conduttore è

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

dove σ è la densità superficiale di carica in P e \vec{n} è il vettore delle normali uscenti dal conduttore nel punto P (perpendicolare al piano tangente in P)

PREMESSA: DISTRIBUZIONE DELLA CARICA SU UN CONDUTTORE ISOLATO

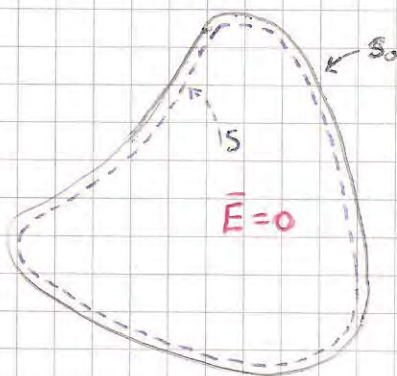
Supponiamo di avere un conduttore avente un certo volume V e una certa superficie S_0 . Supponiamo di poter immergere all'interno del conduttore (inizialmente neutro) una carica puntiforme Q . Supponiamo che la carica Q venga immersa all'interno del conduttore con un processo graduale, quindi tramite infinite particelle microscopiche con cariche elementari dq , tutte dello stesso segno. Dopo un certo tempo, il sistema raggiunge una configurazione di equilibrio: poniamo immaginiamo che nel volume elementare dV intorno ad ogni punto P del conduttore vi sia una particella con carica dq ferma in quel punto (equilibrio elettrostatico).

Poiché $\vec{F} = dq\vec{E}$ se dq è ferma $\vec{F} = m\vec{a} = 0$, quindi $\vec{E} = 0$ in ogni punto del conduttore.

Consideriamo, ora, una superficie S , interna al conduttore ed estremamente vicina alle superficie del conduttore stesso. Applichiamo a questa superficie il teorema di Gauss.

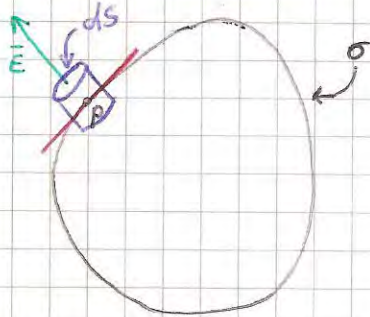
Il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S è nullo, poiché in tutti i punti di S , punti che sono interni al conduttore, il campo elettrico è nullo, pertanto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$



Per cui $Q_{int} = 0$. Allora, la carica Q che somministravamo al conduttore non si trova all'interno delle superficie S . È dunque non può che trovarsi sulle superficie del conduttore, distribuenendosi con una densità superficiale σ che in generale, varia da punto a punto della superficie del conduttore.

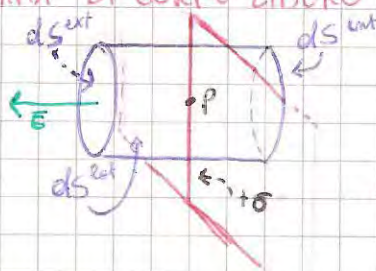
Dimostrazione:



Per quanto detto prima consideriamo la superficie S con densità superficiale σ . Enunciamo il campo elettrostatico nelle immediate vicinanze di un punto P della superficie del conduttore.

Se σ è positiva il campo \vec{E} sarà uscente e diretto secondo le normali al piano tangente alla superficie nel punto P. Dovremo quindi calcolare il modulo di \vec{E} . Applichiamo il th. di Gauss ad un cilindrico elementare di base dS e altezza infinitesima.

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO



$$\Phi_E(S) = \int_{S_{ext}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{int}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

dove $\int_{S_{int}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ perché internamente alle superficie S non ci sono cariche.

$\int_{S_{\text{ext}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ perché lateralmente $d\vec{S}$ è perpendicolare ad \vec{E}

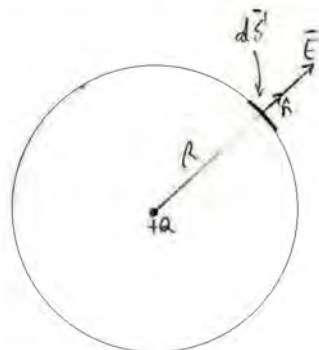
Quindi il flusso $\Phi_E(S)$ vale:

$$\Phi_E(S) = \int_{S_{\text{ext}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \quad \text{ricordando che } dQ_{\text{int}} = \sigma dS \text{ in ke}$$

$$E dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$$

CALCOLO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA ALCUNE CONFIGURAZIONI (DISTRIBUZIONI CONTINUE) DI CARICA UTILI
UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS

FLUSSO DEL CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA +Q ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R ,
ORIENTATA VERSO L'ESTERNO, CENTRATA SULLA CARICA



$$\varphi_e(S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \oint_S d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi R^2$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \quad \varphi_e(S) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0}}$$

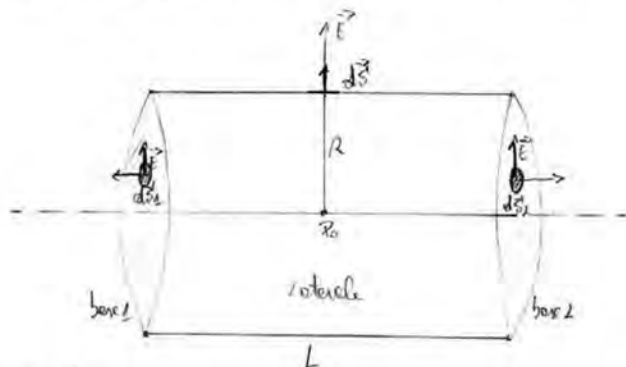
risultando:

$$E = \begin{cases} 0, & r < R, \text{ interno della sfera} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}, & r > R, \text{ esterno della sfera} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno della sfera il campo si calcola come se la carica Q fosse tutta concentrata nel centro.

Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo infinito, uniformemente carico:

$S \rightarrow$ superficie cilindrica escludere di raggio R e lunghezza L



$$\varphi_e(S) = \int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{laterale}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

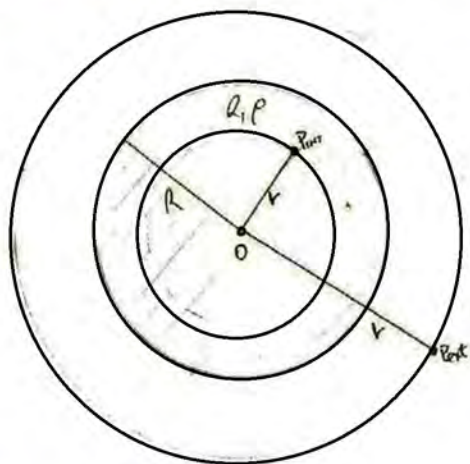
$$\int_{\text{base 1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{base 2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \left[\text{vettori } \vec{E} \text{ e } d\vec{S} \text{ sono perpendicolari per ogni superficie } d\vec{S}, \text{ quindi il loro prodotto scalare } \vec{E} \cdot d\vec{S} \text{ } \rightarrow 0 \right]$$

$$\varphi_e(S) = \int_{\text{laterale}} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad \vec{E} \text{ uniforme} \Rightarrow \varphi_e(S) = \vec{E} \cdot \int_{\text{laterale}} d\vec{S} = E \cdot 2\pi R \cdot L$$

$$\varphi_e(S) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad Q_{\text{int}} = \lambda \cdot L \Rightarrow \varphi_e(S) = \frac{\lambda \cdot L}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \varphi_E(s) = E \cdot \pi R L \\ \varphi_E(s) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \end{cases} \Rightarrow E \cdot \pi R L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0 R}$$

camp. elettrostatico di una carica uniformemente distribuita in una sfera



I° caso - $r < R$ (interno sfera)

$$\varphi_E(s) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \quad \varphi_E(s) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \quad \begin{cases} \varphi_E(s) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(s) = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot r}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} r \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r$$

II° caso - $r > R$ (esterno sfera)

$$\varphi_E(s) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \quad \varphi_E(s) = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2 \quad \begin{cases} \varphi_E(s) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} \\ \varphi_E(s) = E \cdot 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{\rho \cdot R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} \quad \left| \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow E = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{3\epsilon_0} \cdot \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

Riepilogando:

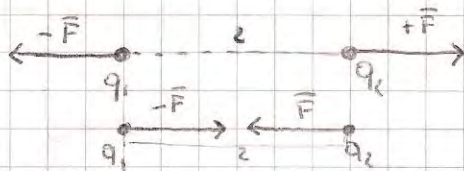
$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \cdot \frac{r}{R^3}, & r < R, \text{ interno della sfera} \\ \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}, & r > R, \text{ esterno della sfera} \end{cases}$$

N.B.: All'esterno della sfera il camp. è computato come se la carica fosse tutta concentrata nel centro.

LEGGE DI COULOMB

FORMA SCALARE

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{z^2}$$



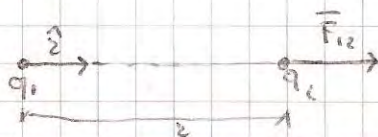
cariche con lo stesso segno

cariche di segno opposto

ϵ_0 = costante dielettrica nel vuoto

FORMA VETTORIALE

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{z^2} \hat{z}$$



VALORI NUMERICI

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME

le forze che una carica sorgente Q esercita su una carica sonda q posta in un punto dello spazio P a distanza z da Q è:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{z^2} \hat{z} \quad \text{il rapporto } \frac{\vec{F}}{q} \text{ è detto campo elettrostatico quindi}$$

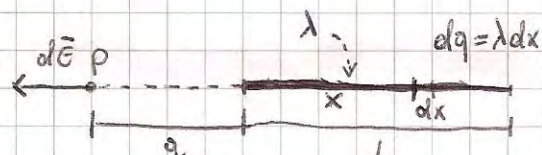
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z} = \left[\frac{N}{C} \right] \quad \vec{F}_el = q \cdot \vec{E}$$

TEOREMA DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

In un sistema di N cariche puntiformi il campo elettrostatico generato dal sistema di cariche in un punto P generico è pari alla somma dei campi prodotti in P da ciascuna delle N cariche, quando osservano una per volta.

ESEMPIO DI CAMPI ELETTROSTATICI

CAMPO DI UN FILO UNIFORMEMENTE CARICO IN UN PUNTO P ALLINEATO AL FILO MA ESTERNO AD ESSO



$dq = \lambda dx$ poiché la densità è uniformemente distribuita allora: $\lambda = \frac{Q}{L}$, quindi:

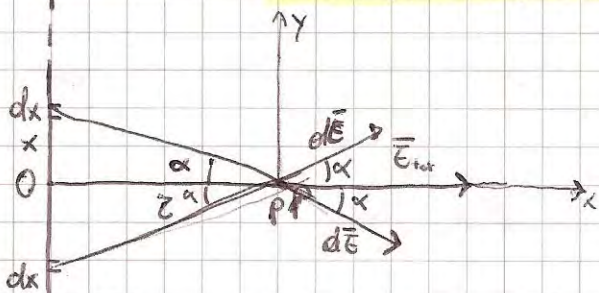
$$dq = \frac{Q}{L} dx$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(x+a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{dx}{(x+a)^2} \rightarrow \text{campo infinitesimo}$$

$$\vec{E} = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \int_0^L \frac{dx}{(x+a)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[-\frac{1}{x+a} \right]_0^L =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{L} \left[-\frac{1}{L+a} + \frac{1}{a} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a(L+a)}$$

CAMPO ELETTROSTATICO, GENERATO DA UN FILO RETTILINEO INDEFINITO UNIFORM. CARICO, IN UN PUNTO P A DISTANZA z DAL FILO

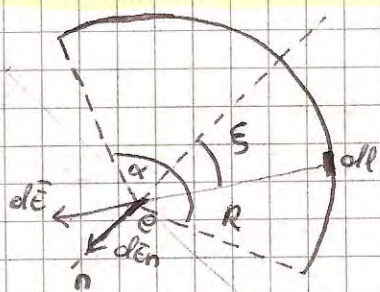


Non importa che dx sia sopra o sotto l'asse x lungo l'asse y di $d\vec{E}$ si annullano perché uguali ed opposte alle componenti lungo l'asse y dei dx che stanno al di sotto del punto O . Il campo totale è dato dunque dalla somma delle componenti dei $d\vec{E}$ lungo l'asse x .

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{x^2+z^2} \hat{r} \rightarrow dE_x = dE \cos \alpha \quad \text{dove} \quad \cos \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$E_{tot} = \int_0^{\infty} dE_x dx = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda z \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+z^2)^{3/2}} dx = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 z}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILO UNIFORMEMENTE CARICO, A FORMA DI ARCO DI CIRCONFERENZA, NEL SUO CENTRO.



$$dq = \lambda dl, \quad dl = R d\xi \rightarrow \text{def. arc length}$$

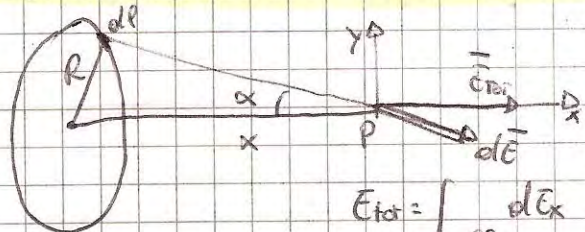
$$dq = \lambda R d\xi$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} d\xi \rightarrow \text{campo elementare}$$

$$dE_n = dE \cos \xi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \cos \xi d\xi \rightarrow \text{campo elementare lungo n}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \xi d\xi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow \text{campo totale}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO NEI PUNTI DEL SUO ASSE

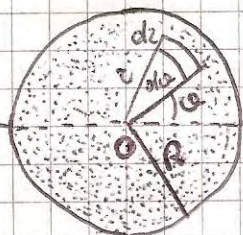
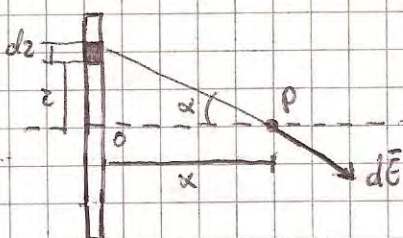


$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{x^2 + R^2} \rightarrow \text{campo elementare}$$

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$E_{\text{tot}} = \int_{\text{anello}} dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} (2\pi R) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN DISCO UNIFORMEMENTE CARICO NEI PUNTI DEL SUO ASSE



$$\text{densità superficiale } \sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$$

$$\text{elemento di area } dS = 2\pi z dz$$

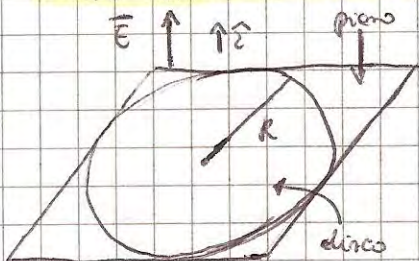
$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi z dz$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{x^2 + z^2} \rightarrow \text{campo elementare}$$

$$dE_x = dE \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \rightarrow \text{campo elementare lungo l'asse x}$$

$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA UN PIANO INDEFINITO, UNIFORMEMENTE CARICO

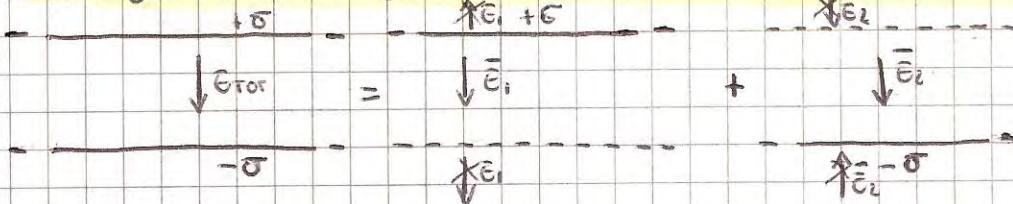


Potremo considerare il piano come un disco di raggio infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

La direzione di \vec{E} è \perp al piano

CAMPO ELETTROSTATICO GENERATO DA DUE PIANI CARICHI UNIFORMEMENTE, INDEFINITI E PARALLELI



$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

CAMPO ELETTROSTATICO NELLE SFERE

CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE SFERICA

Del tl. di Gauss abbiamo:

$$\Phi_s(s) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \longrightarrow E 4\pi z^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

poiché le cariche q distribuite sulle superfici delle sfere, le $Q_{int} = 0$ quindi il campo $E = 0$ all'interno delle sfere

$$E = 0 \quad \text{per } 0 \leq z < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad \text{per } z > R$$

CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA IN UNA SFERA

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \longrightarrow \text{densità volumica} \quad \rho = \frac{Q}{V} \quad \text{dove } V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

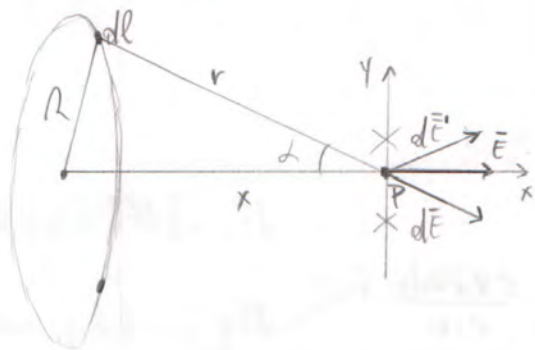
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} z^2 \quad \text{per } 0 \leq z < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad \text{per } z > R$$

CAMPI ELETTROSTATICI DI ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE DI CARICA

7

① Campo elettrostatico generato da un anello uniformemente carico nei punti del suo asse:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad r = \sqrt{x^2 + R^2} \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^2} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

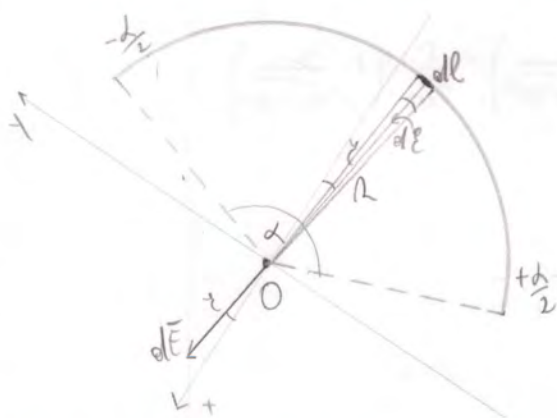
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dl$$

$$|\vec{E}_{tot}| = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \cdot 2\pi R = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{Rx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(lunghezza anello)

② Campo elettrostatico generato da un filo uniformemente carico, e forme d'arco di circonferenza, nel suo centro:



$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad dq = \lambda dl \quad dl = R \cdot d\alpha \quad dq = \lambda R \cdot d\alpha$$

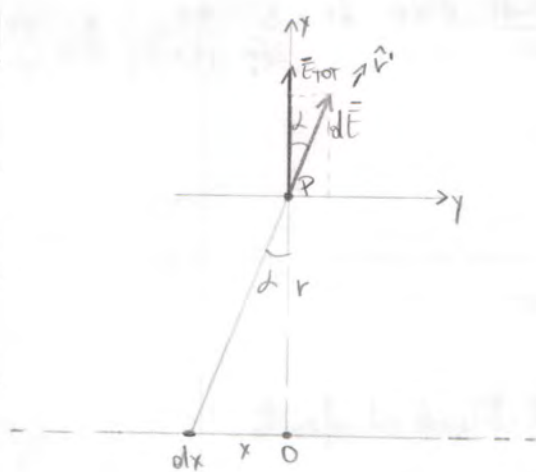
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\alpha}{R^2} \cdot \hat{r}$$

$$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda R d\alpha}{R} \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$$

$$|\vec{E}_{tot}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} \cos(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot 2 \sin(\alpha/2)$$

③ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo indefinito, uniformemente carico:



$$\lambda = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dx \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$|\vec{E}_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx$$

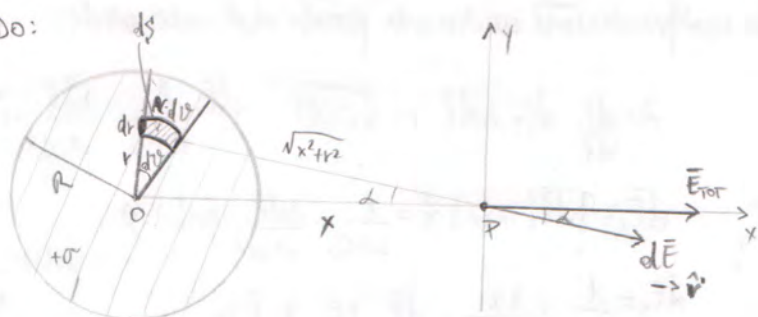
$$\Rightarrow E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx \Rightarrow I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = r \tan(\alpha) \\ dx = r \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} d\alpha = \frac{r}{\cos^2(\alpha)} d\alpha \\ x \rightarrow 0 \quad \alpha \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \quad \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(r^2 \tan^2(\alpha) + r^2)^{3/2}} \cdot \frac{r}{\cos^2(\alpha)} d\alpha$$

$$I = \frac{1}{r^2} \left[\sin(\alpha) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{r^2} \quad E_x = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \lambda r \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

4) Campo elettrostatico prodotto da un disco uniformemente carico, nei punti del suo asse:

I° METODO:



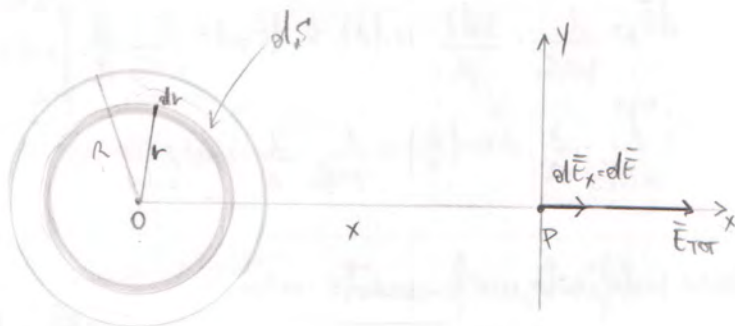
$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad dP = \sigma \cdot dS \quad dS = r \cdot d\theta \cdot dr \quad dP = \sigma r \cdot d\theta \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \hat{r}'$$

$d\vec{E}_x = |d\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x}$
 $d\vec{E}_y$ (si elide per simmetria)

$$|d\vec{E}_x| = dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr}{x^2 + r^2} \cdot \cos(\alpha) \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} \Rightarrow dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma r \cdot d\theta \cdot dr \cdot x}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$|\vec{E}_{\text{tot}}| = E_{\text{tot}} = \int_{\text{disco}} dE_x = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma x}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

II° METODO:

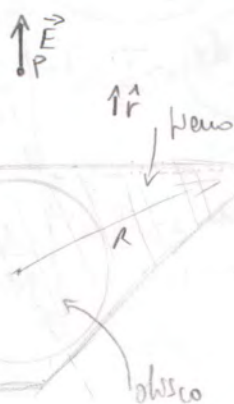


$$\sigma = \frac{dP}{dS} \quad dP = \sigma \cdot dS \quad dS = 2\pi r \cdot dr \quad dS \Rightarrow \text{elemento differenziale} \quad \lambda = \frac{dP}{dl} = \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot dr}{2\pi r} = \sigma \cdot dr \quad d\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r x}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \int d\vec{E} = \frac{\sigma x}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

5) Campo elettrostatico prodotto da un piano indefinito, uniformemente carico:

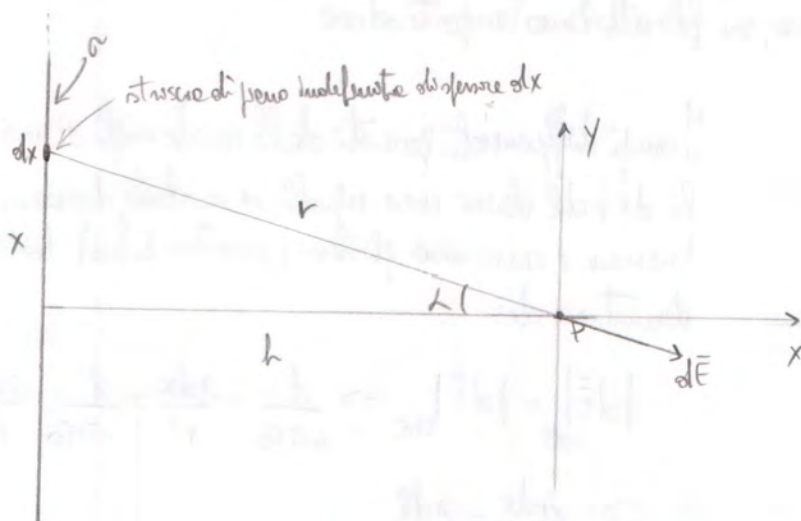
I° METODO:



Piano \rightarrow disco di raggio R che tende ad infinito

$$E = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) \right] = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

con direzione perpendicolare al piano



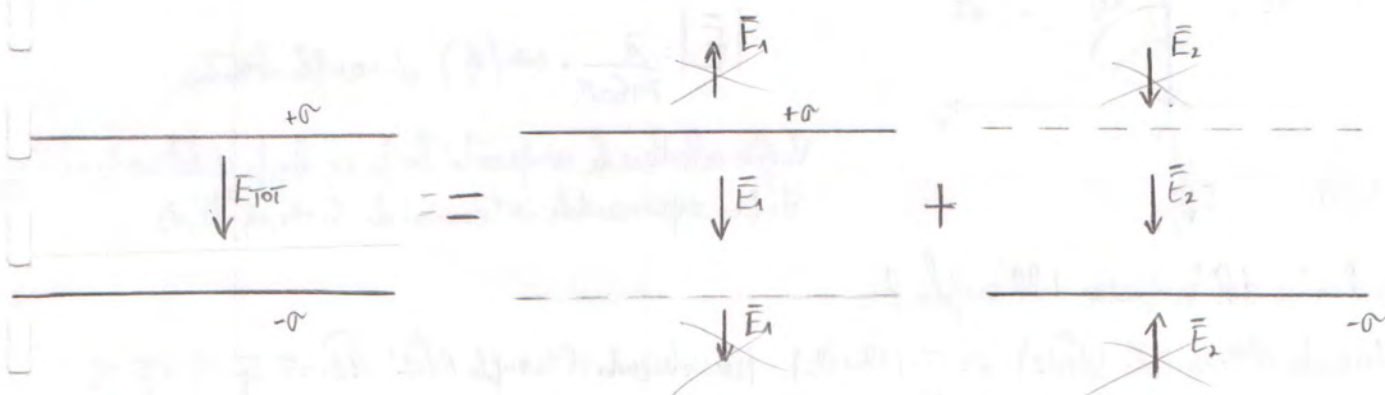
La striscia di pino può essere considerata ed un filo rettilineo indefinito con: $d\lambda = \sigma dx$.

$$\vec{E} = \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \hat{r} \quad \begin{cases} d\vec{E}_x = |\vec{E}| \cdot \cos(\alpha) \cdot \hat{x} \\ d\vec{E}_y = |\vec{E}| \cdot \sin(\alpha) \cdot \hat{y} \end{cases} \quad \begin{aligned} |\vec{E}_x| = dE_x &= \frac{d\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \cdot \cos(\alpha) \\ x &= h \cdot \tan(\alpha) \\ dx &= h \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ h &= r \cos(\alpha) \Rightarrow r = \frac{h}{\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

$$d\lambda = \sigma dx = \sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad dE_x = \frac{\sigma \cdot \frac{h}{\cos^2 \alpha} d\alpha}{2\pi\epsilon_0 \cdot \frac{h}{\cos(\alpha)}} \cdot \cos(\alpha) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} d\alpha$$

$$\vec{E}_{\text{Tot}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} dE_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \pi = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Camp elettrostatico prodotto da due pini carichi uniformemente, indefiniti e paralleli:



$$|\vec{E}| = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad |\vec{E}_{\text{Tot}}| = 2 \cdot |\vec{E}_1| = 2 \cdot |\vec{E}_2| = 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left(\begin{array}{l} \text{all'esterno dei pini i due campi sono uguali} \\ \text{ed opposti, si elidono.} \end{array} \right)$$

Il camp è presente solo tra i due pini ed ha modulo pari a $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, direzione perpendicolare ai pini, e verso da quello carico positivamente ($+\sigma$) a quello carico negativamente ($-\sigma$)

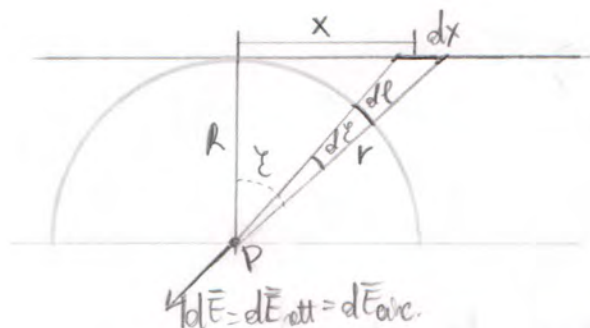
⑦ Equivalenza tra i campi elettrostatici prodotti da un filo rettilineo carico ed un filo a forma di arco di circonferenza, nel punto P, centro delle circonferenze, con filo rettilineo l'infinito esteso:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{dq}{dx} \quad dq = \lambda dl = \lambda dx$$

I campi differenziali generati dalle cariche sugli elementi differenziali dx e dl devono essere uguali, in modulo, direzione e verso. Direzione e verso sono gli stessi (riscontro facile). Abbiamo poi da dimostrare che:

$$|d\vec{E}|_{\text{rett}} = |d\vec{E}|_{\text{arc}} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda dx}{r^2} = \frac{\lambda dl}{R^2}$$

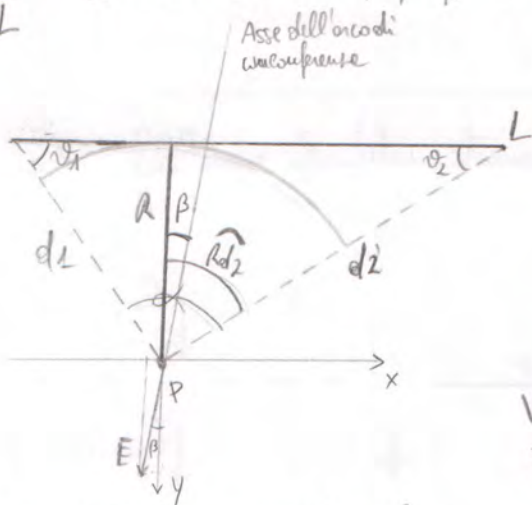


$$x = R \cdot \tan \theta \Rightarrow dx = \frac{R}{\cos^2 \theta} \cdot d\theta \Rightarrow R \cos^2 \theta = dx \cdot \cos^2 \theta \quad dl = R \cdot d\theta \Rightarrow dl = dx \cdot \cos^2 \theta \quad (\text{moltiplico e divido per } \frac{\lambda}{R^2})$$

$$\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{R^2} \cdot \cos^2 \theta \cdot dx \Rightarrow \frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{(R^2 \cos^2 \theta)} \cdot dx \rightarrow R = r \cos \theta \Rightarrow r = \frac{R}{\cos \theta} \rightarrow \boxed{\frac{\lambda}{R^2} \cdot dl = \frac{\lambda}{r^2} \cdot dx} \text{ c.v.d.}$$

⑧ Campo elettrostatico generato da un filo rettilineo di lunghezza L, uniformemente carico:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{Q}{L} \quad R \rightarrow \text{distanza di P dal filo, raggio dell'arco con centro in P.}$$



Per quanto detto precedentemente c'è un'equivalenza tra il campo generato in P dal filo e quello generato in P dall'arco di circonferenza, e vale:

$$|\vec{E}| = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \alpha \rightarrow \text{angolo al centro}$$

Voglio calcolare le componenti lungo x e lungo y del campo elettrostatico esprimendole in termini di R, $\theta_1, \theta_2, d_1, d_2$

Determino il valore dell'ampiezza dell'angolo β :

$$(\text{considerando il triangolo } d_1 d_2) \quad \alpha = \pi - (\theta_1 + \theta_2) \quad (\text{considerando il triangolo } R d_2 L) \quad R d_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$$

$$\beta = R d_2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_2 - \left[\frac{\pi - (\theta_1 + \theta_2)}{2} \right] = \frac{\pi}{2} - \theta_2 - \left[\frac{\pi - \theta_1 - \theta_2}{2} \right] = \frac{\pi - 2\theta_2 - \pi + \theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (\text{sfornamento } \sin(-\alpha))$$

$$\text{posso scrivere: } \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - (\theta_1 + \theta_2)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{per cui: } |\vec{E}| = E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

Possiamo determinare le componenti del campo elettrostatico lungo gli assi x e y fissati, come:

$$|\vec{E}_x| = E_x = E \cdot \sin(\beta) \quad |\vec{E}_y| = E_y = E \cdot \cos(\beta) \quad \text{N.B. le componenti lungo l'asse x è negativa in quanto è diretta nel verso opposto a quello d'orientamento dell'asse}$$

• Determinazione delle componenti λ_{uf} x del camp:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

Formule di prosteferi:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) = \sin(p) - \sin(q), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\sin \vartheta_1 - \sin \vartheta_2)$$

• Determinazione delle componenti λ_{uf} y del camp:

$$E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

Formule di prosteferi:

$$2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \cos(p) + \cos(q), \text{ per cui:}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}\right) = \frac{1}{2} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2)$$

N.B.: Le componenti λ_{uf} l'asse x può essere scritta come:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{1}{2} [\sin(\vartheta_1) - \sin(\vartheta_2)]$$

per il triangolo Δ di L vola: $R = d_1 \cdot \sin(\vartheta_1)$ e $R = d_2 \cdot \sin(\vartheta_2)$

per cui: $\sin(\vartheta_1) = \frac{R}{d_1}$ e $\sin(\vartheta_2) = \frac{R}{d_2}$

per cui:

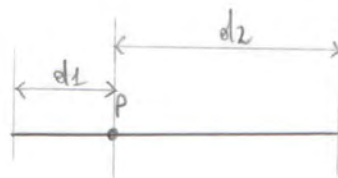
$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} \cdot \left[\frac{R}{d_1} - \frac{R}{d_2} \right] = \boxed{-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right)}$$

Resultante: $\vec{E} = \begin{cases} |\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ |\vec{E}_y| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{R} (\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2) \end{cases}$

• Caso limite

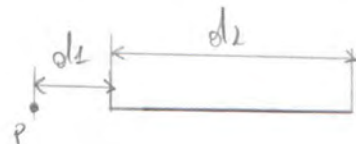
- P si trova sul filo

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \phi \\ \vartheta_1, \vartheta_2 = \phi \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \infty \end{cases}$$



- P si trova sulla retta del filo, ma esternamente ad esso

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \lambda \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \\ E_y = \phi \end{cases}$$



POTENZIALE ELETTROSTATICO

Il lavoro compiuto dalla forza del campo elettrostatico per portare una carica puntiforme q dal punto A al punto B, qualunque ne le linee L che unisce A e B è:

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} = -q (V_B - V_A) \rightarrow L_{AB} = q (V_A - V_B)$$

dove: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$;
 $\vec{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V \rightarrow$ queste proprietà esprime le conservatività del campo elettrico irrotazionale:

$\text{rot } \vec{E} = 0 \rightarrow$ conservatività in forma locale
 $\vec{E} = -\text{grad } V = -\vec{\nabla} V \rightarrow$ conservatività al livello discusso

Nota

$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ è una relazione importante perché ci permette di pensare ad un campo vettoriale come \vec{E} ad un campo scalare rappresentato dal prodotto di V dove V è una funzione potenziale.

Un particolare V è detto potenziale elettrostatico.

Da risultati ottenuti in precedenza sappiamo che la differenza di potenziale è:

$$\Delta V = -\frac{L_{AB}}{q} \quad \text{poiché il lavoro è il prodotto scalare di una forza per uno spostamento, cioè } dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q}$$

quindi

$$\Delta V = -\frac{L_{AB}}{q} = -\frac{1}{q} \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \frac{\vec{F}_{el}}{q} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Supponendo che da voler calcolare il potenziale in A rispetto a B posto a distanza infinita da A allora il potenziale in B sarà appunto nullo, mentre quello in A sarà:

$$V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_B \quad \text{dove } V_B \stackrel{\text{inf}}{=} 0$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO DI UNA CARICA PUNIFORME

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z} \rightarrow \text{potenziali integrali}$$

Note: z è la distanza delle cariche rispetto al punto in cui è calcolato il potenziale.

$$dV_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{z} \rightarrow \text{potenziali infinitesimali}$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA SU UNA SUPERFICIE SFERICA

$$\int V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \quad \text{per } 0 \leq z \leq R$$

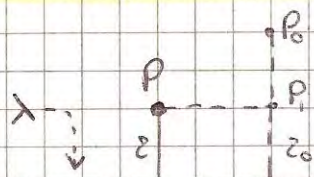
$$\int V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z} \quad \text{per } z > R$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA CARICA Q UNIFORMEMENTE DISTRIBUITA IN UNA SFERA

$$\left| V_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(3 - \frac{z^2}{R^2} \right) \quad \text{per } 0 \leq z \leq R \right.$$

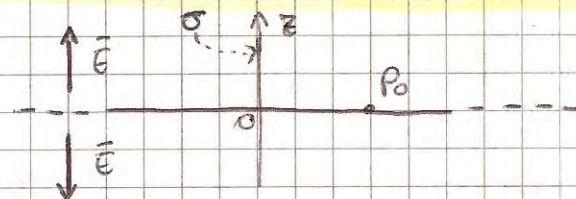
$$\left. V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z} \quad \text{per } z \geq R \right.$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UN FILO RETTILINEO, INDEFINITO, UNIFORMEMENTE CARICO



$$V_P = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

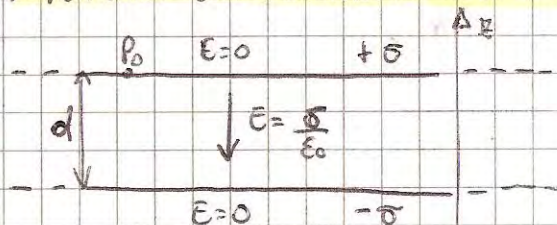
POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UN PIANO INDEFINITO UNIFORMEMENTE CARICO



$$V_{P_0} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} V_P = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \quad z < 0 \\ V_P = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \quad z > 0 \end{array} \right.$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA DUE PIANI INDEFINITI E PARALLELI, CARICHI CON

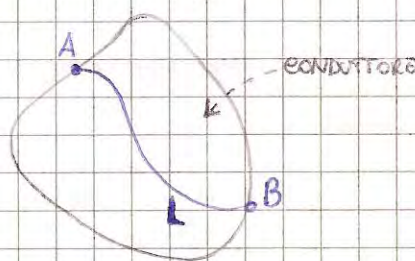
$+\sigma$ e $-\sigma$



$$\left\{ \begin{array}{l} V_P = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad \text{per } z < 0 \\ V_P = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d - z) \quad \text{per } 0 \leq z \leq d \\ V_P = 0 \quad \text{per } z > d \end{array} \right.$$

LA SUPERFICIE DI UN CONDUTTORE È EQUIPOTENZIALE

Consideriamo due punti A e B sulle superficie di un conduttore o interne ed esso e una linea L, interne al conduttore, che lo attraversa. Le differenze dei potenziali sono:



$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Ma per la conservatività in forma integrale del campo E risulta che:

$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Per tanto risulta che $V_B - V_A = 0 \Rightarrow V_B = V_A$ dunque:

I punti delle superficie di un conduttore (e quelli interni al conduttore) si trovano allo stesso potenziale.

OSSERVAZIONE: Il fatto che le superficie di un conduttore ne equipotenziali ci dice qualcosa molto importante e cioè fornisce una spiegazione al fenomeno detto equilibrio statico: tutti i carichi si raccolgono sulle superficie e inoltre mantengono la loro posizione, inalterata fino a che non si presentino altri fenomeni. Il fatto che le cariche sulle superficie sono ferme, significa che le forze F agente sulle cariche q in un punto P delle superficie, non le levano. In altre parole la forza F agente sulle cariche q è perpendicolare allo spostamento $d\vec{r}$, il quale spostamento esse non fanno nelle direzioni del piano tangente al conduttore nel punto P della superficie dove è posizionata la carica considerata. Le perpendicolarità fra la forza F e lo spostamento $d\vec{r}$ è dimostrabile considerando il th. di Coulomb, il quale esprime che la direzione del campo elettrostatico nelle immediate vicinanze del punto P, quando la forza agente sulle cariche q, è ortogonale al piano tangente al conduttore in P.

EQUAZIONE DI POISSON

Si chiede di una relazione locale, che collega il potenziale elettrostatico in un punto con la densità di carica volumica esistente in quel punto.

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \text{TH. GAUSS DIFF.}$$

$$\vec{E} = - \text{grad } V \rightarrow \text{CONSERVATIVITA' DI } \vec{E}$$

$$\Rightarrow \text{div}(-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA (SISTEMA DI DUE CARICHE)

Definiamo energia elettrostatica di un sistema di due cariche puntiformi: q_1 e q_2 , poste a distanza z_{12} , il lavoro che bisogna compiere contro le forze del campo elettrostatico per portare una delle cariche dall'infinito alla distanza z_{12} dell'altra.



$$U \equiv -L_{\infty P_2} = - \int_{\infty}^{z_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{x^2} dx = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left[-\frac{1}{x} \right]_{\infty}^{z_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{z_{12}}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA (SISTEMA DI N CARICHE)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{z_{ij}}$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ serve per tener conto del fatto che le sommatorie \sum compaiono due volte per ogni coppia di termini che vanno considerati una sola volta.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{z_{ij}} \right)$$

dove il termine fra parentesi indica il potenziale elettrostatico generato da tutte le cariche puntiformi eccetto la i -esima, nel punto dove è posizionata la carica i -esima, quindi:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

DENSITA' DI ENERGIA POTENZIALE

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Condensatore: è un sistema di due conduttori tra i quali esiste una differenza di potenziale elettrostatica completa. I due conduttori sono detti armature del condensatore.

Induzione elettrostatica completa: significa che la carica presente su un'armatura del condensatore è uguale ed opposta alla carica presente sull'altra armatura.

Capacità di un condensatore: si definisce capacità di un condensatore il rapporto fra la carica dell'una o dell'altra armatura e la differenza di potenziale tra le armature.

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \longrightarrow \text{dipende dalle geometrie del condensatore e dell'eventuale dielettrico in esso contenuto}$$

Energia elettrostatica di un condensatore

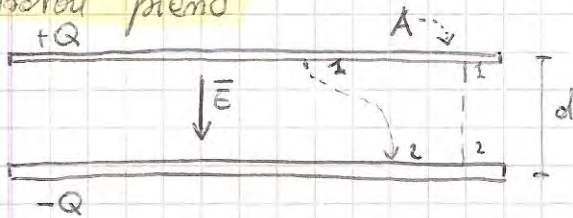
Poiché l'energia elettrostatica U coincide con il lavoro svolto per spostare una carica da una platea all'altra (ovvero da un'armatura all'altra) ebbene che l'energia elettrostatica per un condensatore è:

$$dL = dq V \longrightarrow \text{lavoro infinitesimo di } -q \text{ a } + \quad C = \frac{q}{V} \longrightarrow \text{capacità di un condensatore}$$

$$dL = dq \frac{q}{C} \Rightarrow L = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2C} Q^2 = U$$

$$U = \frac{1}{2C} Q^2 \iff U = \frac{1}{2} \frac{Q}{C} (\Delta V) \iff U = \frac{1}{2} Q |\Delta V|$$

Condensatore piano



Ipotesi: 1) Campo elettrico uniforme all'interno
2) Effetti di bordo trascurabili.

$$\sigma = \frac{Q}{A} \longrightarrow \text{densità superficiale}$$

$$\text{Il campo } \vec{E} \text{ vale } \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \longrightarrow \vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$|\Delta V| = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d \longrightarrow \frac{Q}{|\Delta V|} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \longrightarrow C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

L'energia elettrostatica vale $U = \frac{1}{2C} Q^2$

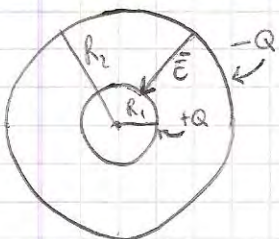
Forza di interazione fra le due armature

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} \longrightarrow \text{procedo a carica costante}$$

$$F = \frac{\epsilon_0 A (\Delta V)^2}{2x^2} \longrightarrow \text{procedo a differenza di potenziale costante}$$

dove x è la distanza delle due armature prima dello spostamento dx (positivo o negativo) da una delle due armature

Condensatore sferico



Il campo elettrico del sistema vale

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 & \text{per } 0 \leq r < R_1 \\ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{per } R_1 \leq r \leq R_2 \\ \vec{E} = 0 & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

la differenza di potenziale vol:

$$|\Delta V| = \int_i^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

la capacità vol:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

NOTA

se $R_2 = R_1 + d$ con $d \ll R_1$

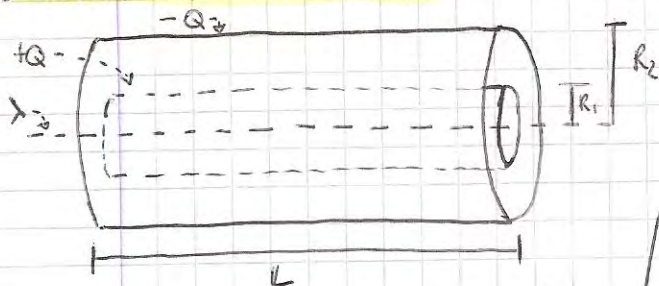
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 (R_1 + d)}{d} \approx \epsilon_0 \frac{4\pi R_1^2}{d} \Rightarrow C \approx \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

dove $4\pi R_1^2$ è una superficie di raggio R_1

l'energia elettrostatica vol:

$$U = \frac{1}{2C} Q^2$$

Condensatore cilindrico



Ipotesi:

1) Trascurare gli effetti di bordo

Il campo elettrostatico vol:

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 & \text{per } 0 \leq r < R_1 \\ \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{1}{r} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \vec{E} = 0 & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

densità lineare lungo l'asse del cilindro

$$\lambda = Q/L$$

la differenza di potenziale vol:

$$|\Delta V| = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

la capacità vol:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{4\pi\epsilon_0 L}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

NOTA

se $R_2 = R_1 + d$ con $d \ll R_1$

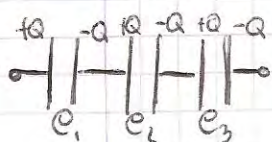
$$C \approx \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{con } A = 2\pi R_1 L \text{ superficie del cilindro di raggio } R_1$$

l'energia elettrostatica vol:

$$U = \frac{1}{2C} Q^2$$

Collegamento dei condensatori

Collegamento in serie: N condensatori si dicono collegati in serie se le estremità delle armature dei condensatori sono tutte collegate in serie tra loro e le estremità delle armature opposte sono collegate tra loro.



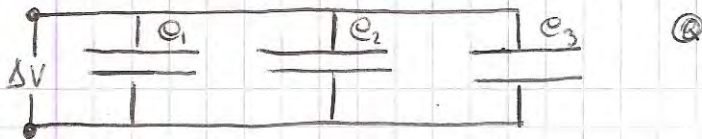
$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

$$U = \frac{1}{2C_1} Q^2 + \frac{1}{2C_2} Q^2 + \frac{1}{2C_3} Q^2 = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = \frac{Q^2}{2C_{eq}}$$

quindi in generale

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

Collegamento in parallelo: N condensatori si dicono collegati in parallelo se ai loro capi risulta la stessa differenza di potenziale.



$$Q_1 = C_1 \Delta V, \quad Q_2 = C_2 \Delta V, \quad Q_3 = C_3 \Delta V$$

$$U = \frac{1}{2} C_1 (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} C_2 (\Delta V)^2 + \frac{1}{2} C_3 (\Delta V)^2 = \frac{(\Delta V)^2}{2} (C_1 + C_2 + C_3) = \frac{(\Delta V)^2}{2} C_{eq}$$

quindi in generale:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N$$

Corrente

Intensità di corrente: Consideriamo un filo conduttore, di sezione S , attraversato da cariche in moto. Si definisce intensità di corrente I , le cariche dQ che attraversano la sezione S del conduttore nel tempo dt .

$$I = \frac{dQ}{dt} = [A] = \left[\frac{C}{s} \right]$$

Corrente stazionaria: corrente che non dipende dal tempo

Velocità delle cariche: per avere corrente c'è bisogno che un certo numero n di cariche attraversino una superficie con una certa velocità. Quindi le cariche dQ che attraversano la sezione S di un conduttore nel tempo dt è quella contenuta nel tratto di spazio $dl = v dt$ dove v è la velocità in modulo di una carica. Pertanto, se n è il numero di cariche per unità di volume del conduttore che concorrono alla corrente I , le cariche dQ è:

$$dQ = n|q| S dl \quad \text{dove } n|q| = N^\circ \text{ cariche}; \quad S dl = \text{unità di Volume.}$$

$$dQ = n|q| S v dt \rightarrow \frac{dQ}{dt} = I = n|q| S v \rightarrow v = \frac{I}{n|q| S}$$

Nota: Il segno positivo della corrente è dato dal segno della velocità delle cariche positive.

Densità di corrente: si definisce densità di corrente il campo vettoriale:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \rightarrow I(t) = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} \quad \text{intensità di corrente come flusso del campo } \vec{J} \text{ attraverso la superficie orientata } S$$

Nota: Se la densità \vec{J} è costante su tutta la superficie S allora la corrente vale:

$$I = JS \quad \text{in forma vettoriale} \quad \vec{J} = n|q| \vec{v} \Rightarrow \vec{J} = n|q| \vec{v}$$

Equazione di continuità: si tratta di una formulazione matematica del principio di conservazione delle cariche elettriche il quale afferma che in un area qualunque predefinita, le cariche iniziali sono uguali a quelle finali. Matematicamente si ha:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{dove } \rho = \text{densità volumica di cariche}$$

Nel caso di regime stazionario delle correnti si ha che ρ è costante nel tempo, così la derivata di ρ rispetto al tempo è nulla e quindi l'equazione di continuità in caso di corrente stazionaria si esprime come: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$

e questo ci indica che in condizioni stazionarie il campo \vec{J} è solenoidale.

Prime leggi di Ohm

$\Delta V = RI$ \longrightarrow la differenza di potenziale è proporzionale alla corrente
 $\longrightarrow R$ è detta resistenza ed è una costante di proporzionalità $R = [\Omega] = \left[\frac{V}{A}\right]$

Seconda legge di Ohm

$R = \rho \frac{L}{S} = [\Omega]$ dove: $\longrightarrow L$ = lunghezza conduttore
 $\longrightarrow S$ = sezione conduttore
 $\longrightarrow \rho$ = resistività del conduttore (dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche del conduttore)

Effetto Joule

Il passaggio di corrente attraverso una resistenza R provoca una dissipazione di energia, tale effetto dissipativo prende il nome di effetto Joule. L'energia dissipata viene detta potenza P vale:

POTEZZA $\longrightarrow P = \Delta VI = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \left[\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}}\right] = [\text{Watt}]$

ENERGIA DISSIPATA NEL TEMPO $t \longrightarrow W = P \cdot t$

FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI OHM

Consideriamo un tratto infinitesimo di filo conduttore e sezione costante ΔS sufficientemente piccola da ritenere che la densità di corrente J ne sia praticamente costante in ogni suo punto. Sia dV la differenza di potenziale applicata ai suoi capi. Il campo elettrico all'interno del conduttore è diretto dal potenziale più alto a quello più basso e vale in modulo:

$\vec{E} = \frac{dV}{dx}$ dove $dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \longrightarrow$ potenziale elementare generato da una carica dq in un punto P lontano all'infinito da un altro punto.

Dalla 1^a legge di Ohm $\Delta V = RI \Rightarrow dV = R dI$, quindi:

$E = \frac{R dI}{dx}$ dove $R = \rho \frac{dx}{dS}$ per la seconda legge di Ohm

$dI = J dS$ corrente in funzione della sua densità

quindi

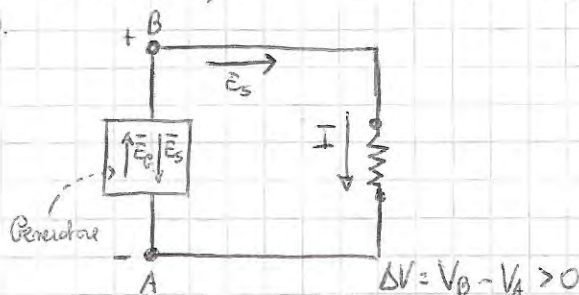
$E = \rho \frac{dx}{dx} \frac{J dS}{dx} = \rho J \Rightarrow E = \rho J \longleftarrow$ forma locale della legge di Ohm.

FORZA ELETTROMOTRICE

La forza elettromotrice è la grandezza che caratterizza un generatore ed è definita come l'integrale del campo elettromotore \vec{E}_e valutato lungo una linea interna al generatore, dal morsetto negativo a quello positivo.

$$\text{fem} = \int_{-}^{+} \vec{E}_e \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}_e = -\vec{E}_s \Rightarrow \vec{E}_e + \vec{E}_s = \rho \vec{J}$



Nota: la definizione fa riferimento al sistema rappresentato in figura, in cui il verso della corrente va dal potenziale maggiore al potenziale minore, cioè da B ad A.

E_e : è il campo elettromotore che viene prodotto dal generatore al fine di mantenere costante la differenza di potenziale ai due capi A e B, infatti, in un sistema in figura non c'è fonte il generatore il circuito col un certo punto non sarebbe "aperto" così non verrebbe alterato la differenza di potenziale.

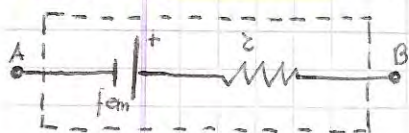
E_s è il campo prodotto dal sistema con differenza di potenziale ΔV

GENERATORE IDEALE



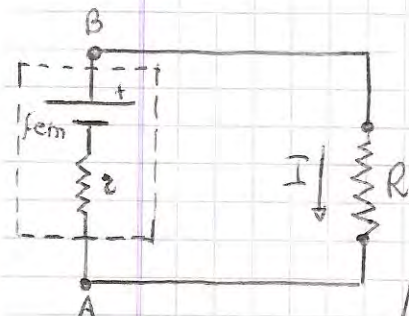
Questo tipo di generatore non è soggetto ad effetti dissipativi (effetto Joule) in quanto non presenta resistenza interna.

GENERATORE REALE



Questo tipo di generatore presenta una resistenza interna e dunque è soggetto a fenomeni di dissipazione. Le potenze dissipate dal generatore valgono:

$$P_{\text{generatore}}^{\text{d}} = z I^2$$



Considerando il sistema elettrico completo possiamo fare le seguenti considerazioni:

$$P_{\text{Joule}} = R I^2 \rightarrow \text{potenza dissipata nel sistema}$$

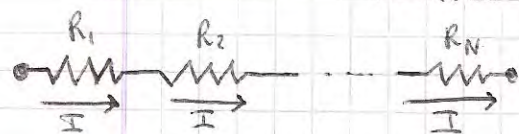
$$P_{\text{generatore}} = \text{fem} I - z I^2 \rightarrow \text{potenza erogata dal generatore}$$

Per la conservazione dell'energia risulta:

$$R I^2 = \text{fem} I - z I^2 \rightarrow I = \frac{\text{fem}}{R + z} \rightarrow \Delta V = R I \rightarrow \Delta V = \text{fem} \frac{z}{1 + \frac{z}{R}}$$

Conclusione: la differenza di potenziale ai capi di un generatore reale dipende dalle resistenze R del circuito (detto carico Ohmico).

Resistenze in serie: N resistenze R_1, R_2, \dots, R_N sono collegate in serie e sono attraversate dalla stessa corrente I.



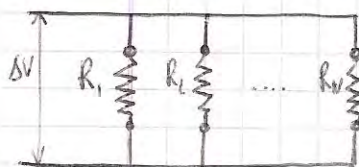
$$\Delta V_1 = R_1 I, \Delta V_2 = R_2 I, \dots, \Delta V_N = R_N I$$

La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$P = R_1 I^2 + R_2 I^2 + \dots + R_N I^2 = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I^2$$

quindi $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$

Resistenze in parallelo: N resistenze R_1, R_2, \dots, R_N sono collegate in parallelo e ai loro capi risulta la stessa differenza di potenziale.



$$I_1 = \frac{\Delta V}{R_1}, I_2 = \frac{\Delta V}{R_2}, \dots, I_N = \frac{\Delta V}{R_N}$$

La potenza dissipata per effetto Joule è:

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R_1} + \frac{(\Delta V)^2}{R_2} + \dots + \frac{(\Delta V)^2}{R_N} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \right) (\Delta V)^2$$

$$\text{quindi } \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

PRIMO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF (o principio dei nodi)

In condizioni stazionarie, la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla. Equivalentemente, la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti.

DIM

Considerando l'equazione di continuità $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ in condizioni stazionarie in cui $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, dove \vec{J} è il campo densità di corrente.

Poiché $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, il campo \vec{J} è solenoidale, quindi $\oint_V \nabla \cdot \vec{J} dV = 0$ dove:

V è il volume delimitato dalla superficie chiusa S scelta arbitrariamente purché in modo che al suo interno ci sia un solo nodo. Per il th. della divergenza si avrà:

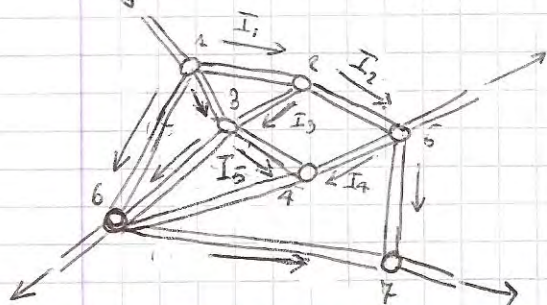
$\oint_V \nabla \cdot \vec{J} dV = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$. Le densità di corrente dunque risulta nulla in tutto la superficie S ma diversa da zero nei punti in cui confluiscono i nodi, pertanto il secondo integrale diventa:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{J}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_2} \vec{J}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{\Delta S_3} \vec{J}_3 \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{dove } \Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3 \text{ sono le regioni dei fili costituenti i rami del nodo.}$$

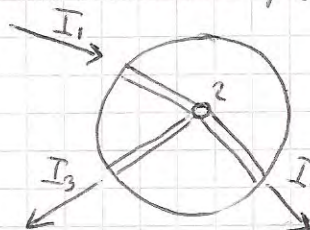
Questi tre integrali forniscono le correnti che otterremo i cui è così:

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

Nota: Per nodo si intende un punto in cui confluiscono almeno tre rami di un circuito. Una parte chiusa di circuito prende il nome di maglia.



Nodo considerato per le dimostrazioni



SECONDO PRINCIPIO DI KIRCHHOFF (o principio delle maglie)

In condizioni stazionarie, in una maglia le somme algebriche delle forze elettromotrici è uguale alle somme algebriche delle cadute di tensione ai capi dei conduttori.

PROCESSO DI SCARICA DI UN CONDENSATORE

Le differenze di potenziali ai capi del condensatore, le correnti che fluiscono nel circuito e le cariche sulle armature del condensatore dipendono dal tempo secondo la relazione:

$$V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad q(t) = C V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dove } \tau = RC$$

PROCESSO DI CARICA DI UN CONDENSATORE

$$q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad V_C(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad V_R(t) = \varepsilon e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{dove } \tau = RC$$

Forza di Lorentz

Diamo che nel punto P dello spazio è presente un campo di induzione magnetica \vec{B} in cui una carica puntiforme q , che ha finito il quel punto con velocità \vec{v} , epresenta una forza \vec{F} deflettente, cioè perpendicolare alla velocità, secondo la relazione:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \longrightarrow \text{FORZA DI LORENTZ}$$

Note:

- 1) la forza di Lorentz è \perp alla velocità della carica q , pertanto \vec{F} non compie lavoro su q
- 2) Il campo di induzione magnetica \vec{B} non modifica la carica, ma le dirige cioè cambia la direzione del vettore velocità.
- 3) In presenza di un campo elettrico la forza di Lorentz diventa

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

PRIMA FORMULA DI LAPLACE (Campo di induzione magnetica)

Sia $d\vec{l}$ un elemento di filo lungo L percorso da una corrente stazionaria I . Consideriamo $d\vec{l}$ orientato nel verso della corrente I . Un elemento di corrente I di piccole nel punto P distante z da $d\vec{l}$ un campo di induzione magnetica elementare $d\vec{B}$ dato dalla formula:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{z^3} \longrightarrow 1^a \text{ formula di Laplace in forme differenziale}$$

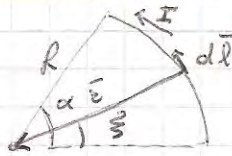
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{z^3} \longrightarrow 1^a \text{ formula di Laplace in forme integrale}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Wb}{A \cdot m} \longrightarrow \text{permeabilità magnetica nel vuoto}$$

APPLICAZIONI 1^a FORMULA DI LAPLACE

CAMPO DI INDUZIONE MAGN. PRODOTTO DA UN FILO A FORMA DI ARCO DI CIRCONE

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{z^3}$$



$$d\vec{l} = R d\theta$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{R}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\alpha d\theta$$

CAMPO MAGN. SPIRA CIRCOLARE NEL SUO CENTRO

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{n}$$



CAMPO MAGN. SPIRA CIRCOLARE SUL SUO ASSE



$$d\vec{l} \perp \vec{r} \Rightarrow d\vec{l} \wedge \vec{r} = d\vec{l} \times \sin \alpha \vec{r} = dl r$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{z^2}$$

$$dB_z = dB \cos \alpha \text{ dove } \cos \alpha = \frac{R}{z}$$

$$dB_z = dB \cos \alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{z^3} dl \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{z^3} \int_{\text{spira}} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{z^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \text{ dove } z^2 = R^2 + z^2$$

CAMPO MAGN. FILO RETTILINEO



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Note

- 1) Sul filo il campo B diverge
- 2) Esternamente al filo il campo B è nullo

LEGE DI BIOT-SAVART (CAMPO FILO INDEFINITO)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

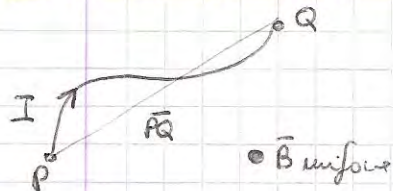
SECONDA LEGE DI LAPLACE

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \longrightarrow \text{FORMA DIFFERENZIALE}$$

$$\vec{F} = I \int_L d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \longrightarrow \text{FORMA INTEGRALE}$$

APPLICAZIONI SECONDA LEGE DI LAPLACE

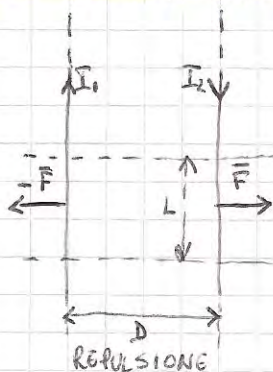
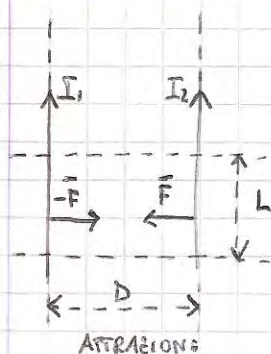
FORZA SU UN TRATTO DI FILO



$$\vec{F} = I \int_{\text{filo}} d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \left(\int_{\text{filo}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = I \vec{PQ} \wedge \vec{B}$$

Nota: Se il filo è chiuso la forza è nulla

FORZA DI INTERAZIONE TRA DUE FILI PARALLELI E INDEFINITI



$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi D}$$

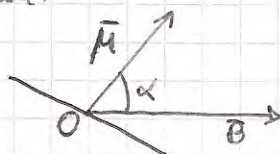
MOMENTO DI DIPOLO

Su due momenti di dipolo da una spirale attraversata da una corrente I il vettore:

mag $\vec{\mu} = I \vec{S}$ dove \vec{S} è il vettore associato alla superficie S della spirale e diretto perpendicolarmente alla spirale.

MOMENTO MECCANICO

$$\vec{C} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

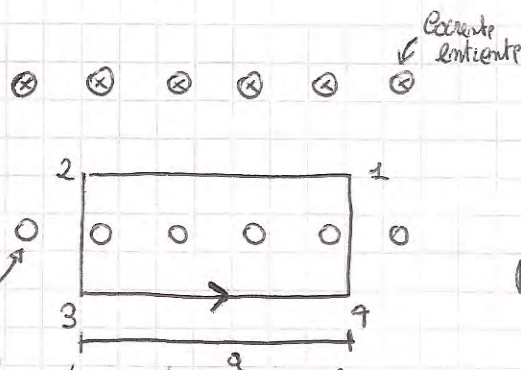
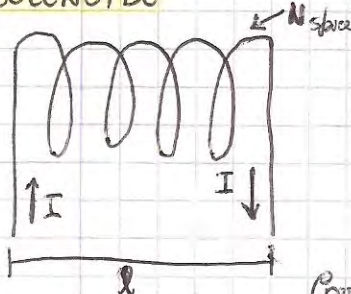


TEOREMA DI AMPERE

La circolazione del campo magnetostatico lungo una linea chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea moltiplicata per la permeabilità magnetica nel vuoto.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{conc}}$$

SOLENOIDE



$$\oint_{\text{K34}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{K2}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \cdot a$$

$$\sum I_{\text{conc}} = I N a \quad \text{dove } N = n \cdot a$$

$$B a = \mu_0 I N a \Rightarrow B = \mu_0 I N$$

$$n = \frac{N}{l} \longrightarrow \text{numero di spire per unità di lunghezza}$$

TEOREMA DI AMPERE (FORMA INTEGRALE)

ENUNCIATO: La circolazione del campo magnetostatico lungo una linea chiusa orientata è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate con la linea moltiplicate per la permeabilità magnetica del vuoto.

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{conc.}}$$

PREMESSE

CIRCOLAZIONE DI UN CAMPO VETTORIALE LUNGO UNA LINEA

Sia dato un campo vettoriale \vec{A} . Consideriamo una linea infinitesimale dl immersa nel campo \vec{A} . Questa infinitesimale, l'elemento di linea può considerarsi rettilineo e diretto lungo un certo verso \hat{e} che forma una certa direzione rispetto al campo \vec{A} . Orientato il segmento dl significa assegnare un vettore $d\vec{l}$ di modulo dl e della stessa direzione e verso di \hat{e} , cioè $d\vec{l} = dl \cdot \hat{e}$.

Diciamo circolazione elementare del campo vettoriale \vec{A} lungo la linea orientata $d\vec{l}$ la quantità:

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = A dl \cos \alpha$$



Estendendo tale concetto al finito diciamo che

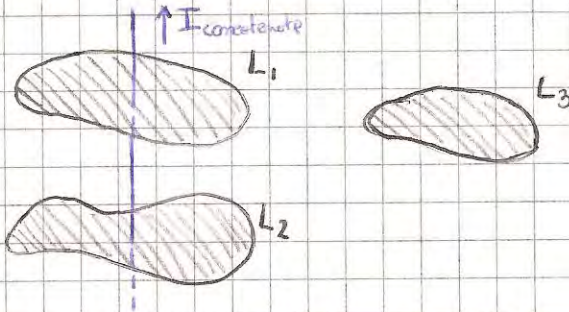
la circolazione lungo una curva L , immersa in un campo vettoriale \vec{A} non uniforme è la somma delle circolazione elementari lungo gli elementi di curva elementari orientati in cui L viene suddivisa. Si perviene quindi al seguente integrale di linea:

$$C_A(L) = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

CORRENTE CONCATENATA

Una corrente si dice concatenata alle curve L chiuse se attraversa le superfici che la come contengono la linea L .

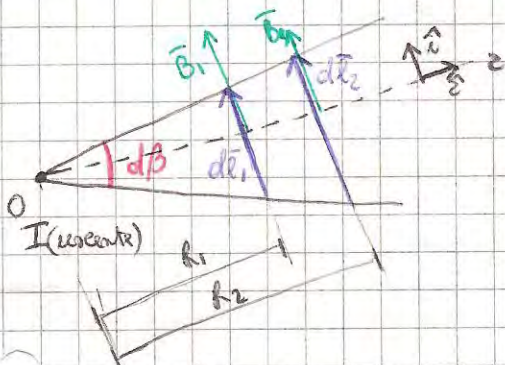
Esempio:



La corrente è concatenata alle curve L_1 e L_2 , ma non alle curve L_3 .

CIRCOLAZIONE ELEMENTARE DEL CAMPO MAGNETOSTATICO GENERATO DA UNA CORRENTE I LUNGO DUE LINEE ELEMENTARI dl_1 E dl_2 CHE SOTTENDONO UN ANGOLO PIANO $d\beta$

CASO I. Le due linee elementari dl_1 e dl_2 sono perpendicolari alle rispettive z (dispongono in O e con direzione e verso di \hat{z}), e distanze R_1 ed R_2 dall'origine O .



$$d\vec{l}_1 = dl_1 \hat{z}$$

$$d\vec{l}_2 = dl_2 \hat{z}$$

Per la legge di Biot-Savart, il campo \vec{B} a distanza R_1 vale:

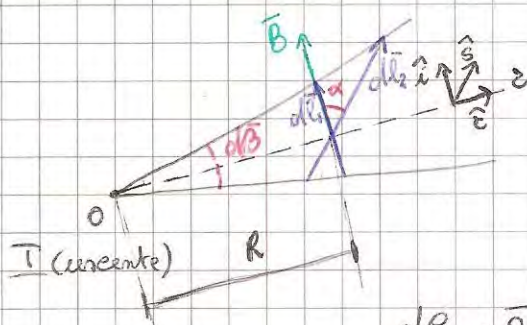
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} \hat{z} \Rightarrow dC_1 = \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = B_1 dl_1 \cos 0 =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} dl_1 (\hat{z} \cdot \hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1} dl_1$$

Ricordando che per definizione di radiante risulta $dl_1 = R_1 d\beta$, si ha

$$dC_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\beta, \text{ pertanto il campo non dipende dalla distanza radiale e si ha dunque che } \boxed{dC_1 = dC_2}$$

CASO I. Se due elementi dl_1 e dl_2 si trovano alle stesse distanze R dall'origine O ma sono orientati rispettivamente secondo i vettori \hat{i} ed \hat{s}



$$d\vec{l}_1 = dl_1 \hat{i} \quad d\vec{l}_2 = dl_2 \hat{s}$$

Il campo \vec{B} e distanze R vale $\vec{B} = B \hat{i}$ dove B per la legge di Biot-Savart vale:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \Rightarrow dC_1 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B dl_1 (\hat{i} \cdot \hat{i}) \cos 0 = B dl_1$$

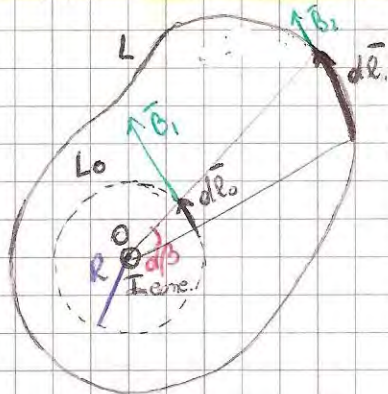
$$dC_2 = \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = B dl_2 (\hat{i} \cdot \hat{s}) \cos \alpha = B dl_2 \cos \alpha$$

Ricordando che $dl_1 = dl_2 \cos \alpha$ otteniamo che $dC_1 = B dl_1 = B dl_2 \cos \alpha = dC_2$

$$\boxed{dC_1 = dC_2}$$

Principi i concetti fondamentali, pensiamo ed affrontiamo il problema del calcolo della circuizione del campo magnetostatico generato da una corrente I una qualunque curva L chiusa.

CASO I. LA CORRENTE I è concorrente alle linee L



I = corrente rettilinea indefinita uscente dal piano del foglio, perpendicolare ed entro concorrente alle linee L e passante per il centro O

L_0 = circonferenza di raggio R e centro O

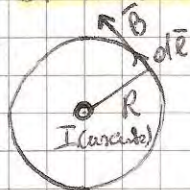
Per quanto detto al caso I delle formule risulta:

$$dC_0 = dC$$

Molte, dal momento che la superficie piena intorno alle linee L può essere vista come una partizione costituita da infiniti anelli pieni uscenti da O , la circuizione del campo magnetostatico \vec{B} generato dalla corrente I lungo le linee L è quella attraverso le circonferenze L_0 , e cioè:

$$C_B(L) = \mu_0 I_{enc}$$

Nota: CIRCUITAZIONE DEL CAMPO \vec{B} GENERATO DALLA CORRENTE I LUNGO UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R .

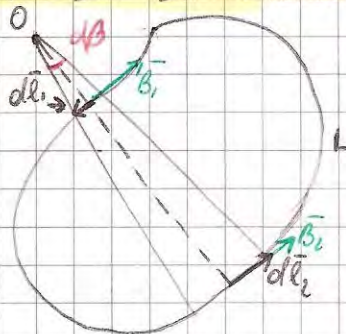


Per Biot-Savart il campo \vec{B} vale $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

La circuizione del campo \vec{B} lungo la circonferenza L è:

$$C_B(L) = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B dl \cos 0 = B \oint_L dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

CASO II. LA CORRENTE I non è concorrente alle linee L



Le circuizioni lungo le linee elementari $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ sono uguali (per le formule caso I) ed opposte perché l'orientazione di $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$ è data dal verso della corrente. Quindi:

$$dC_1 = -dC_2 \Rightarrow dC_1 + dC_2 = 0$$

Dal momento che ciò è vero per qualunque altro anello pieno elementare uscente dal punto fisso O' che intersechi le linee L , ne consegue che:

$$C_B(L) = 0$$

OSSERVAZIONI:

1. In questo teorema giocano un ruolo fondamentale due concetti: una delle nozioni fisiche, l'altra di natura matematica, e cioè:
 - la dipendenza del campo magnetotattico da Biot-Savart dall'inverso delle distanze.
 - la dipendenza diretta delle distanze degli archi di circonferenza.
2. Questo teorema sembra il legame tra le correnti elettriche e il campo magnetico che esse producono.
3. Il fatto che l'integrale di linee $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ non sia nullo ci dice che il campo \vec{B} non è conservativo, ma poiché $\text{div } \vec{B} = 0$ il campo \vec{B} risulta essere solenoidale.

TEOREMA DI AMPERE (FORMA DIFFERENZIALE)

Consideriamo una densità di corrente \vec{J} per una corrente concatenata. In generale, neppure da $\vec{I}(t) = \int_S \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S}$, se la corrente è concatenata con una linea L che circonda una certa superficie chiusa S risulta, allora, che la somma delle correnti concatenate che possono attraversare la superficie S è uguale al flusso del campo \vec{J} attraverso la superficie S e cioè:

$$\sum I_{\text{conc}} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per il teorema di Ampere risulta:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per il tr. della circolazione il primo membro diventa $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$ per cui risulta:

$$\oint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Per l'arbitrarietà della superficie S , gli integrali dovranno essere uguali:

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}$$

INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Grazie alle equazioni fondamentali dell'elettrostatica e al tr. di Ampere si è dimostrato che i campi elettrostatici e di induzione magnetica sono indipendenti tra loro in conclusioni di staticità. Ma come succede se tali conclusioni non sussistono? Per rispondere bisogna introdurre le leggi dell'induzione elettromagnetica (o anche leggi di Faraday-Neumann-Lenz).

LEGGI DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA (FORMA INTEGRALE)

Consideriamo un campo di induzione magnetica \vec{B} in generale variabile da punto a punto e dipendente dal tempo. Sia L una linea chiusa contenuta nel dominio di \vec{B} . Le leggi dell'induzione magnetica affermano che la circolazione del campo elettromotore \vec{E}_i^{tot} lungo la linea chiusa L è uguale alla derivata totale rispetto al tempo, cambiata di segno, del flusso del campo \vec{B} attraverso una qualunque superficie S che si affochi alla linea L .

$$\oint_L \vec{E}_i^{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

dove: l'integrale al primo membro è detto anche forza elettromotrice (f.e.m.)

l'integrale al secondo membro è la variazione rispetto al tempo del flusso del campo \vec{B} attraverso una superficie S dipendente dal tempo

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt} \xrightarrow{\text{1}^a \text{ LEGGE DI OHM}} I = \frac{f.e.m.}{R} = - \frac{1}{R} \frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

LEGGI DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA (FORMA DIFFERENZIALE)

La legge dell'induzione elettromagnetica in forma differenziale assume la seguente forma:

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Questa equazione dimostra che il rotore del campo elettrico, analogamente a quello elettrostatico in cui vale $\text{rot } \vec{E} = 0$, non è irrotazionale. Ciò significa che mentre in un dominio semplicemente connesso esso è conservativo. Ma, dal punto di vista fisico, questa formula esprime un fenomeno del tutto nuovo e cioè: un campo \vec{B} variabile nel tempo genera un campo elettrico (non conservativo)

Nota:

Da notare il fatto che la relazione, che qui sopra, esprime che un campo \vec{B} variabile nel tempo genera un campo elettrico, quindi non elettrostatico, al quale esiste indipendentemente da \vec{B} .

Dimostrazione:

Per dimostrare la relazione (1) evverremo dalle leggi dell'induzione elettromagnetica in forma integrale, che ricordiamo essere:

$$(2) \quad \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad \text{f.e.m.} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Il secondo membro di questa relazione rappresenta la variazione del flusso del campo \vec{B} rispetto al tempo. ~~Si generalizza~~ Sappiamo inoltre che il flusso \vec{B} non varia solo nel tempo ma anche nello spazio, in quanto la superficie S dipende due volte dal tempo t . In altre parole, riteniamo considerare la variazione del flusso del campo \vec{B} ^{nel tempo} attraverso una superficie S variabile nel tempo.

Le derivate temporali di un flusso di un campo vettoriale $\vec{C}(\vec{r}, t)$, dipendente in generale dallo spazio e dal tempo è possibile ricavare nel seguente modo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \int_{S(t)} \text{div } \vec{C} \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} - \oint_{L(t)=\partial S} \vec{v} \wedge \vec{C} \cdot d\vec{l}$$

Applicando queste formule al campo \vec{B} e ricordando che $\text{div } \vec{B} = 0$, avremo:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{L(t)=\partial S} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Perfatto la (2) diventa:

$$\oint_L \vec{E}_i^{\text{tot}} \cdot d\vec{l} = - \int_{S(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_{L(t)=\partial S} \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L (\vec{E}_i^{\text{tot}} - \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Le quantità al primo membro rappresentano le differenze fra il campo elettromotore indotto e il campo di Lorentz. Ma tale differenza non può essere altro che il campo elettrico in questo.

1. il campo elettromotore indotto è il campo elettrico prodotto da tutte le cause di natura produce un campo elettrico, quando esiste il campo di Lorentz
2. Aggiungendo al campo elettromotore indotto una delle due cause induttore come il campo di Lorentz, allora quello che rimane è un campo elettrico

Perfatto risultato:

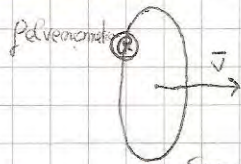
$$\int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{applicando il th. delle derivate al 1° membro otterremo:}$$

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \text{per l'arbitrarietà della superficie } S \text{ risulta:}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

FENOMENI DI INDUZIONE

INDUZIONE DI 1^a SPECIE



Magnete fermo

(Circuito induttore)

Spire

(Circuito indotto)

Risultato esperimento:

1) Finché la spira non muove, in essa non si presenta corrente indotta con:

verso contrario quando la spira si allontana dal magnete
verso stesso quando la spira si avvicina al magnete

2) Quando la spira si ferma, la corrente sparisce.

CONSIDERAZIONI:

a) A livello microscopico, gli elettroni di conduzione contenuti nella spira (elettroni liberi) si muovono con velocità \vec{v} (la stessa velocità della spira) nel campo \vec{B} e pertanto subiscono l'effetto delle forze di Lorentz. In conseguenza di ciò si produce una d.d.p. nella spira.

b) Finché la spira è in movimento, il flusso del campo \vec{B} ed è come se fosse variabile perché il campo \vec{B} è invariante. Quindi la variazione del flusso del campo \vec{B} nel tempo genera una f.e.m. lungo una qualunque linea chiusa dello spazio, quindi anche lungo i punti della spira.

INDUZIONE DI 2^a SPECIE



\vec{v}



Magnete

(Circuito induttore)

Spire

(Circuito indotto)

Risultati esperimento:

Risultati di questo esperimento sono analoghi a quelli ottenuti con il magnete fermo.

CONSIDERAZIONI:

a) Non vi è, queste volte, spostamento di carica di conduzione della spira e quindi non vi è forze di Lorentz.

b) Poiché non vi è movimento delle cariche di conduzione, a livello microscopico le leggi dell'induzione elettromagnetica sembrerebbero non valere, però i casi di induzione di seconda specie, eppure la corrente indotta nella spira viene rilevata.

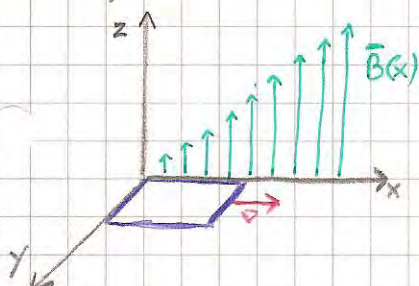
c) Il fatto che al livello microscopico esista ciò che invece a livello macroscopico, tecnicamente non dovrebbe esistere, è alla base di una differenza fra la visione della meccanica classica e quella dell'elettromagnetismo.

CONCLUSIONI

La differenza fra la visione della meccanica classica e quella dell'elettromagnetismo si risolve ricorrendo alle teorie della Relatività Ristretta formulate da Einstein. Secondo tale teoria, in campi \vec{E} e \vec{B} non sono altro che due modi di manifestarsi dello stesso ente fisico e cioè il Campo elettromagnetico. Tale teoria trova giustificazione nel fatto che la meccanica classica tende a spiegare fenomeni fisici, estendendo il fenomeno del resto dell'universo e adottando un sistema di riferimento assoluto per descriverli.

Le teorie della Relatività Ristretta affermano che fenomeni di natura elettromagnetica non possono essere spiegati considerando un solo sistema di riferimento assoluto, ma bisogna considerare sistemi differenti e secondo del fenomeno considerato (elettrico o magnetico), bisogna quindi introdurre

sistemi che non sono assoluti ma piuttosto relativi agli oggetti considerati. Per comprendere meglio le visioni relativistiche di Einstein facciamo un esempio:



Consideriamo una spira rettangolare con due lati coincidenti con gli assi x e y , immersa in un campo di induzione magnetica \vec{B} di direzione \vec{z} e crescente linearmente lungo x :

$B(x) = B_0 x$. La spira si muove con velocità $\vec{v} = \frac{dx}{dt}$ costante e mantenendo sempre il suo lato coincidente con l'asse x . Che succede? Il risultato di questo esperimento è:

ovviamente il sorgere di una f.e.m. indotta nella spira, ma i punti di vista sono due:

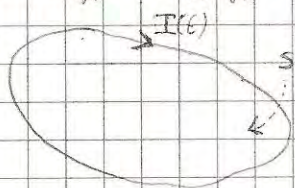
1) Punto di vista dell'osservatore solidale con gli assi x, y, z : l'osservatore vede che la spira si muove e nota che il flusso di \vec{B} attraverso la spira cresce perché invade zone in cui il campo è sempre più intenso. Le cause, dunque, dell'aumento del flusso è dovuto al movimento della spira (induzione di 1° specie)

2) Punto di vista dell'osservatore solidale con la spira: l'osservatore vede la spira ferma, ma nota che nel tempo il campo all'interno della spira cresce e pertanto cresce il flusso di \vec{B} attraverso la spira. Le cause, dunque, dell'aumento del flusso è dovuto alle variazioni temporali del campo \vec{B} nella spira (induzione di 2° specie)

AUTOINDUZIONE

tra i fenomeni di induzione elettromagnetica rientrano anche quelli dell'autoinduzione. Questo fenomeno prevede la presenza di un circuito indotto e uno induttore, ma è sufficiente un circuito attraversato da una corrente variabile nel tempo.

Per il fenomeno di autoinduzione risulta che un circuito è attraversato da una corrente $I(t)$, la corrente genera un campo $\vec{B}(t)$ proporzionale all'intensità per intensità col $I(t)$. Vi sarà dunque un flusso del campo di induzione magnetica, attraverso una qualunque superficie S che si appoggia al circuito, che risulta essere proporzionale a $I(t)$



$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = LI(t)$$

dove $L = \frac{\Phi_B}{I}$ è detto coefficiente di autoinduzione o semplicemente induttanza

In presenza di autoinduzione la legge dell'induzione elettromagnetica si scrive:

$$f.e.m. = - \frac{d\Phi_B(t)}{dt} = - \frac{dLI}{dt} \rightarrow \text{legge dell'autoinduzione elettromagnetica}$$

AUTOINDUZIONE IN UN SOLENOIDE

Se I la corrente che fluisce in un solenoide avente: N spire di sezione S ; lunghezza l . Detto m la densità di spire del solenoide avremo che $m = \frac{N}{l}$. In condizioni di idealità (campo \vec{B} nullo fuori del solenoide e uniforme \vec{B} nel suo interno), il campo \vec{B} nelle N spire $B = \mu_0 m I$. Pertanto il flusso concatenato con l' i -esima spira è

$$(\Phi_B)_i = BS = \mu_0 m IS \rightarrow (\Phi_B)_i = \mu_0 \frac{N}{l} IS$$

Il flusso concatenato con le N spire del solenoide è quindi:

$$\Phi_B = N(\Phi_B)_i \rightarrow \Phi_B = \mu_0 \frac{N^2}{l} IS$$

Da cui il coefficiente di autoinduzione L :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

MUTUA INDUZIONE

Consideriamo due circuiti fermi attraversati dalle correnti $I_1(t)$ e $I_2(t)$. La corrente $I_1(t)$ genera un campo $\vec{B}_1(t)$ e quindi un flusso $\Phi_2(t)$ concatenato con il circuito 2.

Il flusso $\Phi_2(t)$ risulta proporzionale a $I_1(t)$

$$\Phi_2(t) = M_{12} I_1(t) \quad \text{dove } M_{12} = \text{coefficiente di mutua induzione}$$

Nel circuito 2 si genera una f.e.m. indotta per cui

$$f.e.m._2 = - \frac{d\Phi_2(t)}{dt} = - \frac{d(M_{12} I_1)}{dt} = - M_{12} \frac{dI_1}{dt}$$

Rispetto al circuito 1, la situazione sarà del tutto analoga e pertanto valterà che $M_{12} = M_{21} = M$ e il valore dei due coefficienti sarà:

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1} = \frac{\Phi_1}{I_2}$$

TEOREMA DI AMPERE - MAXWELL (FORMA DIFFERENZIALE)

La formulazione di questo teorema nasce da un problema "circolato" del teorema di Ampere in forma differenziale, cioè: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, il quale non ha soluzione generale ma solo in condizioni di stazionarietà, cioè con campi elettrici e magnetici non dipendenti dal tempo.

Dunque, con questo teorema si cerca di generalizzare il teorema di Ampere e per farlo ci serviamo dell'equazione di continuità.

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{equazione di continuità}$$

DIMOSTRAZIONE:

Supponiamo che nel teorema di Ampere manchi qualcosa, quindi supponiamo che ne:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X}) \quad \text{dove } \vec{X} \text{ è un termine che ha le dimensioni fisiche di una densità di corrente.}$$

Calcolando le divergenze al 1° e 2° membro otteniamo:

$$\text{div rot } \vec{B} = \mu_0 \text{div} (\vec{J} + \vec{X}) \quad \text{da cui:} \quad \begin{aligned} \text{div rot } \vec{B} &= 0 \\ \text{div} (\vec{J} + \vec{X}) &= \text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{X} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\text{div } \vec{J} + \text{div } \vec{X} = 0 \quad (1)$$

Dall'equazione di continuità sappiamo che la divergenza di \vec{J} vale: $\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.
Del tl. di Gauss in forma differenziale sappiamo che $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \text{div } \vec{E}$
Pertanto:

$$\text{div } \vec{J} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} \Rightarrow \text{div } \vec{J} = -\text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Sostituendo nelle (1) troviamo:

$$-\text{div} \left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \text{div } \vec{X} = 0 \Rightarrow \text{div} \left(\vec{X} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Dato che $\left(\vec{X} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ è un campo vettoriale la cui divergenza è nulla allora

il campo vettoriale è solenoidale e pertanto può esprimersi come il rotore di un campo vettoriale \vec{Z} che rappresenta il suo potenziale vettore. Quindi:

$$\vec{X} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{Z}$$

Ipotezzando che il campo \vec{Z} sia conservativo, allora $\text{rot } \vec{Z} = 0$, per cui:

$$\vec{X} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

A questo punto l'equazione di partenza, cioè $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{X})$ diventa:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

In questo risultato compare il tl. di Ampere-Maxwell.

OSSERVAZIONI:

L'ipotesi dell'esistenza del termine \vec{X} nel teorema di Ampere porta ad una perfetta simmetria tra i campi \vec{E} e \vec{B} . Infatti così come un campo elettrico è prodotto da cariche e da campi \vec{B} variabili nel tempo (legge dell'induzione elettromagnetica), il teorema di Ampere-Maxwell dice che un campo di induzione magnetica è prodotto da correnti e da campi elettrici variabili nel tempo.

TEOREMA DI AMPERE - MAXWELL (FORMA INTEGRALE)

Integriamo l'equazione: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ su una qualunque superficie S dello spazio, fissa e orientata, avente come contorno una linea chiusa L :

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Nell'ultimo termine, poiché la superficie S è fissa, l'operatore derivata temporale può portare fuori dal segno dell'integrale, ottenendo:

$$\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

dove:

1) $\int_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$ per il tl. delle equazioni

2) $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{\text{corrente}}$ per definizione di corrente concatenata alle linee L

3) $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_E(S)$ flusso del campo elettrico attraverso la superficie S

Portando:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{corrente}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E(S)$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(I_{\text{corrente}} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E(S) \right) \quad (*)$$

Nota: CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Le correnti originate da una variazione nel tempo del campo elettrico si chiamano correnti di spostamento

$$I_s = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_E(S)$$

Per quanto detto in nota, la (*) diventa

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{corrente}} + I_s)$$

Quest'ultima espressione costituisce il tl. di Ampere - Maxwell in forma integrale.

EQUAZIONI DI MAXWELL

	FORMA INTEGRALE (NON LOCALE)	FORMA DIFFERENZIALE (LOCALE)
TH. GAUSS	$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
FORMULE DEL CAMPO MAGNETICO	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
LEGGE DELL'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA	$\oint_L \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
TH. AMPERE - MAXWELL	$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_{\text{corrente}} + I_s)$	$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$